

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رضائی
بهار ۱۴۰۲



۲۳ خرداد ۱۴۰۲

میان‌ترم جایگزین

زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه

۱. آزمون از ۱۲۰ نمره است. دریافت ۱۰۰ نمره به منزله دریافت نمره کامل است.

۲. تمامی سوالات نیاز به استدلال دقیق ریاضی دارند.

۳. برگه افراد تنها در صورتی که متن پیمان‌نامه زیر را در پاسخ‌برگ خود بنویسند و امضا کنند، نمره‌دهی خواهد شد.

«اینجانب ... دانشجوی رشته ... دانشگاه صنعتی شریف به شماره دانشجویی ... تقاضا دارم که این برگه به عنوان آزمون میان‌ترم جایگزین درس جبر خطی به شماره درس ۴۰۲۸۲ گروه ۱ ارائه شده در بهار ۱۴۰۲ تصحیح شده و مستقل از آنکه نمره آن بالاتر یا پایین‌تر از آزمون میان‌ترم اصلی اینجانب باشد، نمره آن به عنوان نمره میان‌ترم این درس برای بنده محاسبه شود.»

۴. بدیهی است که طبق متن فوق در صورتی که در آزمون میان‌ترم جایگزین شرکت کرده و برگه خود را تحویل دهید، نمره آن برای شما جایگزین خواهد شد. این جایگزینی حتمی و غیرقابل مذاکره است و حتی در صورتی که آزمون اصلی را ۱۰۰ شده باشید و این آزمون را صفر شوید، جایگزینی انجام خواهد شد. تخمین نمره در انتهای آزمون و قضاوت اینکه آیا نمره شما بهتر خواهد شد، به عهده شما خواهد بود.

۵. مدت زمان آزمون پایان‌ترم ۱۵:۲ و آزمون میان‌ترم جایگزین ۲ ساعت است. در صورتی که آزمون میان‌ترم جایگزین را شرکت کنید، سه گزینه خواهید داشت:

(آ) ساعت ۷ صبح آزمون میان‌ترم خود را شروع کرده و ساعت ۸ در صورتی که از شرکت در آزمون میان‌ترم جایگزین منصرف شدید، آزمون پایان‌ترم را شروع کرده و پس از به اتمام رسیدن زمان آزمون پایان‌ترم، برگه پایان‌ترم خود را تحویل دهید.

(ب) ساعت ۷ صبح میان‌ترم خود را شروع کنید و ساعت ۱۰ صبح برگه میان‌ترم خود را تحویل دهید و پس از آن آزمون پایان‌ترم خود را شروع کنید و آزمون پایان‌ترم را پس از طی زمان تعیین شده برای آن به پایان ببرید.

(ج) آزمون میان‌ترم جایگزین را شرکت نکنید و ساعت ۸ صبح آزمون پایان‌ترم را شرکت کنید. دقت کنید که نمی‌توانید از وقت اضافه آزمون میان‌ترم جایگزین برای آزمون پایان‌ترم استفاده کنید. در صورتی که از وقت آزمون میان‌ترم جایگزین برای آزمون پایان‌ترم استفاده کنید، نمره هر دو آزمون صفر در نظر گرفته خواهد شد

پرسش‌های پاسخ کوتاه (۳۷ نمره)

پرسش ۱ (۷ نمره) مقادیر حقیقی از x را که به ازای آن مجموعه

$$\{(x, 1, 1, 1), (1, x, 1, 1), (1, 1, x, 1), (1, 1, 1, x)\}$$

پایه‌ای برای \mathbb{R}^4 تشکیل می‌دهد را بدست آورید.

پرسش ۲ (۷ نمره) اگر P یک ماتریس افکنش^۱ باشد، مقدار $(I - cP)^{-1}$ را محاسبه کنید. ($c \neq 1$)

پرسش ۳ (۷ نمره) فرم کاهش یافته سطری پلکانی^۲ ماتریس زیر را که از کنار هم قرار داده شدن ماتریس A به ابعاد 4×3 تشکیل شده است بر حسب فرم کاهش یافته سطری پلکانی A بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$$

پرسش ۴ (۷ نمره) رتبه ماتریس زیر را بر حسب مقادیر a و b بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ 1 & a & 1 & b \\ b & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 & a \end{bmatrix}$$

پرسش ۵ (۷ نمره) اگر A و B ماتریس‌های مربعی حقیقی باشند که $AB = 0_n$ باشد، اثبات کنید

$$\dim(\ker(A)) + \dim(\ker(B)) \geq n$$

پرسش های دودویی (۱۸ نمره)

پرسش ۱ (۶ نمره) مشخص کنید هر یک از موارد زیر آیا خطی هستند یا خیر.

(آ) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 2x_3\}$.

(ب) مجموعه جواب های معادله $y'' + 4y' + y = 0$. (منظور از y' و y'' مشتق اول و دوم تابع $y(t)$ است)

(ج) مجموعه چند جمله ای های $p(x)$ که $\int_{-1}^1 p(x) dx = 1$.

پرسش ۲ (۶ نمره) یک ماتریس دلخواه مانند A را Nilpotent گوئیم اگر یک مقدار طبیعی m وجود داشته باشد که $A^m = 0$.

(آ) آیا جمع دو ماتریس Nilpotent نیز Nilpotent است؟

(ب) آیا ضرب دو ماتریس Nilpotent نیز Nilpotent است؟

پرسش ۳ (۶ نمره) فرض کنید که دو مجموعه بردار A و B مستقل Affine شامل بردارهای یکه باشند. به سوالات زیر پاسخ درست نادرست دهید.

(آ) $A \cup B$ مستقل Affine است.

(ب) $A \cap B$ مستقل Affine است.

(ج) $A \cup B$ مستقل خطی است.

(د) $A \cap B$ مستقل خطی است.

پرسش های تشریحی (۶۵ نمره)

پرسش ۱ (۱۸ نمره) فرض کنید دو مجموعه $\{u_1, \dots, u_n\}$ و $\{v_1, \dots, v_n\}$ دو مجموعه بردار در فضای مجهز به ضرب داخلی V باشند که به ازای تمام مقادیر i و j

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$$

نشان دهید که اگر $\{u_1, \dots, u_t\}$ یک پایه برای $\{u_1, \dots, u_n\}$ باشند، $\{v_1, \dots, v_t\}$ یک پایه برای $\{v_1, \dots, v_n\}$ خواهد بود. ($t \leq n$)

پرسش ۲ (۱۸ نمره) مقادیری از x و y و z که عبارت زیر را کمینه می کند به دست آورید.

$$\int_0^1 (\ln t - x - yt - zt^2)^2 dt$$

راهنمایی: پایه $(1, t, t^2)$ را برای چند جمله ای ها در نظر بگیرید. با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت یک پایه متعامد محاسبه کنید و $\ln t$ را برحسب این پایه بازنویسی کنید.

راهنمایی: از مقادیر زیر می توانید استفاده کنید.

$$\int_0^1 (\ln t) dt = -1; \quad \int_0^1 (t \ln t) dt = -\frac{1}{4}; \quad \int_0^1 (t^2 \ln t) dt = -\frac{1}{9}; \quad \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

پرسش ۳ (۲۰ نمره)

(آ) فرض کنید که A یک ماتریس مربعی به ابعاد n است. اثبات کنید

$$\text{rank}(A - I_n) \geq \text{rank}(A) - 1$$

(۱۱ ماتریس $n \times n$ با درایه های تماماً ۱ است.)

(ب) فرض کنید که M یک ماتریس دودویی با درایه های قطری صفر است که به ازای هر دو مقدار متمایز i و j مقدار M_{ij} برابر صفر است اگر و تنها اگر M_{ij} برابر ۱ باشد. اثبات کنید.

$$\text{rank}(M) \geq n - 1$$

پرسش ۴ (۹ نمره) اثبات کنید که رتبه سطری و ستونی یک ماتریس برابر است.