به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاییز ۱۴۰۱

---

۹ بهمن ۱۴۰۱، ساعت ۹:۰۰ | **آزمون پایان‌ترم** | زمان آزمون: ۱۵۰ دقیقه

نکته ۱ لطفا پاسخ بخش‌های مختلف را در برگه‌های جدا به نحوی که قابل تفکیک باشند بنویسید.

نکته ۲ آزمون از ۱۳۵ نمره است. دریافت ۱۰۰ نمره از این ۱۳۵ نمره به منزله دریافت نمره کامل است.

بخش اول: پرسش‌های درست/نادرست (۲۴ نمره)

زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه

به پرسش‌های زیر با استدلال ریاضی (اثبات یا مثال نقض) پاسخ درست/نادرست بدهید.

پرسش ۱ (۴ نمره) مقادیر ویژه یک ماتریس مربعی مختلط متقارن، حقیقی است.

پرسش ۲ (۴ نمره) اگر یک ماتریس حقیقی دلخواه وارون‌پذیر باشد، آنگاه قطری‌پذیر نیز خواهد بود.

پرسش ۳ (۴ نمره) اگر دو ماتریس A و B هم‌ارز سطری باشند، آنگاه فضای ستونی آنها با هم برابر است.

پرسش ۴ (۴ نمره) اگر A یک ماتریس مربعی $n \times n$ با مقادیر ویژه حقیقی و n بردار ویژه دو به دو متعامد باشد، آنگاه ماتریس A متقارن خواهد بود.

پرسش ۵ (۴ نمره) حاصل ضرب ماتریس‌های استاندارد تبدیل افکنش[1] یک ماتریس استاندارد تبدیل افکنش است.

پرسش ۶ (۴ نمره) اگر برای ماتریس دلخواه A داشته باشیم $Null(A) = \{۰\}$، آنگاه این ماتریس وارون‌پذیر خواهد بود.

بخش دوم: پرسش‌های تشریحی (۱۱۱ نمره)

زمان پیشنهادی: ۱۲۰ دقیقه

پرسش ۱ (۶ نمره) نشان دهید که اگر ماتریس‌های P و Q ماتریس‌های مربعی و دارای رتبه کامل باشند و ماتریس A یک ماتریس دلخواه به ابعاد $m \times n$ باشد، خواهیم داشت

$$Rank(A) = Rank(PA) = Rank(AQ)$$

پرسش ۲ (۱۲ نمره) R ماتریس استاندارد تبدیل انعکاس[2] نسبت به خطی با زاویه θ از محور x است. R را برحسب ماتریس استاندارد تبدیل افکنش P به دست آوردید و نشان دهید که $R^۲ = I$ است.

پرسش ۳ (۲۸ نمره) همان‌طور که در درس بود و شما نخواندید! نرم فربینیوس[3] یک ماتریس جذر حاصل جمع مربعات درایه‌های آن ماتریس است که معادل جذر جمع درایه‌های قطری گرام آن ماتریس می‌شود.

(آ) (۶ نمره) اگر $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ باشد و مقادیر تکین آن مجموعه $\{\sigma_i\}_{i=۱}^{n}$ باشد، اثبات کنید $\|A\|_F^۲ = \sum_{i=۱}^{n} \sigma_i^۲$

اگر A یک ماتریس حقیقی عریض[4] $m \times n$ با رتبه سطری کامل باشد و $\tilde{x} = \tilde{A}b$ کمینه‌کننده عبارت $\|Ax - b\|_۲^۲$ باشد، آنگاه:

(ب) (۶ نمره) $\tilde{A}$ را با استفاده از مشتق محاسبه نمایید.

(ج) (۸ نمره) با استفاده از تجزیه مقدار تکین[5] مقدار $\tilde{A}$ را به صورت جمع ماتریس‌هایی با رتبه یک بدست آورید.

(د) (۸ نمره) $\tilde{A}$ را از طریق تجزیه QR بدست آورید.

پرسش ۴ (۲۰ نمره)

(آ) (۵ نمره) فرض کنید که $A^۲ = I$ باشد. اثبات کنید به ازای هر بردار حقیقی دلخواه v، بردارهای $Av + v$ و $Av - v$ بردارهای ویژه ماتریس A خواهند بود.

---

[1] Projection
[2] Reflection
[3] Frobenius
[4] Wide
[5] Singular Value Decomposition

(ب) (۵ نمره) اثبات کنید که هر بردار حقیقی دلخواه را می‌توان به صورت ترکیب خطی بردارهای ویژه ماتریس A نوشت.

(ج) (۱۰ نمره) اثبات کنید که ماتریس $A+I$ قطری‌پذیر است.

پرسش ۵ (۱۳ نمره) ماتریس پادمتقارن[۶] A مفروض است.

(آ) (۶) نشان دهید ماتریس $I-A$ وارون‌پذیر است.

(ب) (۷) نشان دهید ماتریس $Q=(I-A)^{-1}(I+A)$ متعامد است.

پرسش ۶ (۱۲ نمره) فضای برداری از توابع مختلط V با پایه‌های $\{e^{x}, e^{-x}, xe^{x}, xe^{-x}\}$ مفروض است. ماتریس استاندارد تبدیل خطی

$$T\left(f\left(x\right)\right)=2f(x)-f'(x)$$

را بیابید و در مورد Isomorphism بودن آن تحقیق کنید.

پرسش ۷ (۲۰ نمره) فرض کنید که ماتریس A یک ماتریس مربعی حقیقی باشد.

(آ) (۱۰ نمره) اگر مجموع قدر مطلق درایه‌های هر ستون برابر صفر یا ۱ باشد، ثابت کنید که مقادیر ویژه ماتریس A اندازه‌ای کوچک‌تر یا مساوی ۱ دارند.

$$\forall j, \sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \in \{0,1\} \Rightarrow |\lambda| \leq 1$$

(ب) (۱۰ نمره) اگر مجموع قدر مطلق درایه‌های ستون jام برابر S_j باشد، یعنی به عبارت ریاضی

$$\forall j, S_j=\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

باشد، اثبات کنید

$$\sum_{S_j\neq 0}\frac{|a_{jj}|}{S_j} \leq Rank(A)$$

[۶] Skew Symmetric