



## جبر خطی

حمیدرضا ربیعی، مریم رضوانی  
پاییز ۱۴۰۱

تمرین ۱: بردارها، معادلات خطی

پرسش‌های تئوری (۱۴۰ نمره)

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۸/۹ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۸/۱۴ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

پرسش ۱ (۲۵ نمره) کدام یک از مجموعه‌های زیر یک زیرفضا از فضای  $\mathbb{R}^\infty$  هستند؟ (برای تایید یا رد هر مورد استدلال کنید. ممکن است چند مورد از موارد زیر پاسخ صحیح باشند.)

- (آ) (۵ نمره) تمام دنباله‌هایی از اعداد حقیقی مانند  $(1, 0, 1, 0, \dots)$  که تعداد صفرهای آن نامتناهی است.  
 (ب) (۵ نمره) تمام دنباله‌های کاهشی (به دنباله‌ی  $x_1, x_2, \dots$  کاهشی گویند هرگاه به ازای هر  $j$  رابطه‌ی  $x_{j+1} \leq x_j$  برقرار باشد).  
 (ج) (۵ نمره) تمام دنباله‌های همگرا (به یک دنباله همگرا گویند هرگاه یک ثابت حقیقی  $c$  وجود داشته باشد طوری که  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = c$ ).  
 (د) (۵ نمره) تمام دنباله‌های حسابی (به یک دنباله حسابی گویند هرگاه عدد ثابت حقیقی  $d$  وجود داشته باشد که به ازای هر  $j$ ،  $x_{j+1} = x_j + d$  باشد).  
 (ه) (۵ نمره) تمام دنباله‌های هندسی (به یک دنباله هندسی گویند هرگاه عدد ثابت حقیقی  $q$  وجود داشته باشد که به ازای هر  $j$ ،  $x_{j+1} = x_j \times q$  باشد).

پرسش ۲ (۲۰ نمره) فضای برداری  $F$  و مجموعه‌های

$$U_1 = \{(x, y, 0) \in F^3 \mid x, y \in F\}$$

$$U_2 = \{(0, 0, z) \in F^3 \mid z \in F\}$$

$$U_3 = \{(0, y, y) \in F^3 \mid y \in F\}$$

مفروض‌اند. نشان دهید  $U_1 + U_2 + U_3$  یک جمع مستقیم<sup>۱</sup> نیست.

پرسش ۳ (۳۰ نمره)

(آ) (۱۵ نمره) زیر مجموعه‌ای از فضای  $\mathbb{R}^2$  بسازید که روی جمع و تفریق برداری بسته باشد ولی روی ضرب اسکالر بسته نباشد.

(ب) (۱۵ نمره) زیر مجموعه‌ای از فضای  $\mathbb{R}^2$  بسازید که روی ضرب اسکالر بسته باشد ولی روی جمع و تفریق برداری بسته نباشد.

پرسش ۴ (۳۰ نمره) در هر یک از بخش‌های زیر، مقادیر حقیقی  $k$  را که به ازای آن مجموعه  $W$  یک زیر فضا از  $\mathbb{R}^3$  می‌شود را مشخص کنید.

(آ) (۱۵ نمره)  $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = k\}$

(ب) (۱۵ نمره)  $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = k\}$

پرسش ۵ (۲۰ نمره) مجموعه  $F = \{0, e, a, b\}$  مفروض است. جمع و ضرب بر روی این مجموعه به صورت زیر تعریف می‌شود.

+	0	e	a	b	.	0	e	a	b
0	0	e	a	b	0	0	0	0	0
e	e	0	b	a	e	0	e	a	b
a	a	b	0	e	a	0	a	b	e
b	b	a	e	0	b	0	b	e	a

فرض کنید که  $F$  خاصیت توزیع‌پذیری و شرکت‌پذیری را دارا باشد.

(آ) (۱۰ نمره) آیا  $F$  معرف یک حلقه<sup>۲</sup> است؟

(ب) (۱۰ نمره) آیا  $F$  معرف یک میدان<sup>۳</sup> است؟

Direct sum<sup>۱</sup>  
Ring<sup>۲</sup>  
Field<sup>۳</sup>

پرسش ۶ (۱۵ نمره) با تشکیل ماتریس افزوده و یافتن فرم کاهش یافته سطری پلکانی، چند جمله‌ای درجه سوم  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  را به نحوی بیابید که

$$p(1) = 1, p'(1) = 5, p(-1) = 3, p'(-1) = 1$$

### پرسش‌های عملی (۳۰ نمره) مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۸/۹ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۸/۱۴ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

پرسش ۱ (۳۰ نمره) فرض کنید رباتی داریم که در فضای ۳ بعدی جابجا می‌شود و می‌خواهد به سمت هدفی که ما در یک صفحه‌ی مثلثی مشخص کرده‌ایم، تیراندازی کند. صفحه را برای هر تیراندازی جابه‌جا می‌کنیم و ربات ما هم هر بار قدری جابجا شده و جهت هدف‌گیری‌اش را تغییر می‌دهد. ما می‌خواهیم قبل از این که رباتمان شلیک کند، با توجه به مبدا ربات و جهت هدف‌گیری‌اش نقطه اصابت را تشخیص داده و فاصله‌اش تا هدف را بدست آوریم. در واقع ورودی‌هایمان، مختصات رئوس صفحه مثلثی، نقطه هدف، محل ربات و جهت هدف‌گیری‌اش در هر سری تیراندازی بوده و خروجی‌مان نیز نقطه اصابت تیر و فاصله آن تا هدف مورد نظر ماست.

نکته تیر ممکن است به خارج از مثلث برود که در این صورت باید گزارش شود.

نکته فرض کنید همه چیز در شرایط ایده‌آل انجام شده و گرانش و اتلاف انرژی نداریم.

#### ورودی

در خط اول  $n$  آمده که تعداد مراحل تست هدف‌گیری رباتمان می‌باشد. در هر ۶ خط بعدی که مربوط به یک مرحله می‌باشد، به ترتیب مختصات رئوس صفحه‌ی مثلثمان در فضای ۳ بعدی، مختصات هدف، مختصات مبدا هدف‌گیری یا همان ربات و در آخر، برداری که در جهت هدف‌گیری ربات می‌باشد، آمده است.

#### خروجی

برای هر مرحله به ترتیب در صورتی که محاسباتمان نشان دهد که برای هر مرحله در صورتی که محاسبات نشان دهد که تیر به صفحه اصابت نخواهد کرد باید `outside the triangle!` چاپ شود و در غیر این صورت باید در یک خط مختصات پیش‌بینی شده برای اصابت تیر و فاصله‌ی آن تا هدف چاپ شود. دقت شود که مختصات به صورت  $[x \ y \ z]$  می‌باشد که مولفه‌های  $x$ ،  $y$  و  $z$  و همچنین فاصله تا هدف همگی باید به یک رقم اعشار گرد شده و چاپ شوند.

#### ورودی نمونه ۱

```
3
0 1 1.50
1 0 1.25
-1 0 1.00
0.5 0.3 1.3
0 0 0
0.1 0.1 1
0.5 2 2
-0.5 0.5 1.5
-2 0.5 1
-0.55 1.1 1.55
0 0.5 0
0.3 0.2 0.5
0 1 1.50
1 0 1.25
-1 0 1.00
0.5 0.3 1.3
0 0 0
0 -1 -1
```

#### خروجی نمونه ۱

```
[0.1 0.1 1.2] 0.4
outside the triangle!
outside the triangle!
```

#### ورودی و خروجی‌های نمونه

به پیوست تمرین ورودی و خروجی نمونه ۱ به همراه یک ورودی و خروجی نمونه دیگر در قالب فایل `txt` تقدیم شده است.

#### کتابخانه‌های مجاز

در این تمرین تنها مجاز به استفاده از NumPy در کنار کتابخانه‌های داخلی زبان پایتون هستید.

#### نحوه تحویل

پاسخ خود را در قالب یک فایل Python بنویسید و در کوئرا آپلود کنید. نمره‌دهی به وسیله سامانه داور خودکار انجام خواهد شد.