به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۱

تمرین ۱: بردارها، معادلات خطی

پرسش‌های تئوری (۱۴۰ نمره)

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۸/۹ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۸/۱۴ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

پرسش ۱ (۲۵ نمره) کدام یک از مجموعه‌های زیر یک زیرفضا از فضای $\mathbb{R}^\infty$ هستند؟ (برای تایید یا رد هر مورد استدلال کنید. ممکن است چند مورد از موارد زیر پاسخ صحیح باشند.)

(آ) (۵ نمره) تمام دنباله‌هایی از اعداد حقیقی مانند $(1, 0, 1, 0, \dots)$ که تعداد صفرهای آن نامتناهی است.

(ب) (۵ نمره) تمام دنباله‌های کاهشی (به دنباله‌ی $x_1, x_2, \dots$ کاهشی گویند هرگاه به ازای هر j رابطه‌ی $x_{j+1} \leq x_j$ برقرار باشد.)

(ج) (۵ نمره) تمام دنباله‌های همگرا (به یک دنباله همگرا گویند هرگاه یک ثابت حقیقی c وجود داشته باشد طوری که $\lim_{j\to\infty} x_j = c$.)

(د) (۵ نمره) تمام دنباله‌های حسابی (به یک دنباله حسابی گویند هرگاه عدد ثابت حقیقی d وجود داشته باشد که به ازای هر j، $x_{j+1} = x_j + d$ باشد.)

(ه) (۵ نمره) تمام دنباله‌های هندسی (به یک دنباله هندسی گویند هرگاه عدد ثابت حقیقی q وجود داشته باشد که به ازای هر j، $x_{j+1} = x_j \times q$ باشد.)

پاسخ

(آ) برای این که مجموعه مورد نظر یک زیرفضا باشد باید شرایط زیرفضا بودن را داشته باشند. حال داریم: $(1, 0, 1, 0, \dots) + (1, 0, 1, 0, \dots) = (2, 0, 2, 0, \dots)$. با توجه به این که دنباله بدست آمده یک دنباله از زیرفضای ما نیست، بنابراین این مجموعه نمی‌تواند زیرفضا باشد.

(ب) این مورد هم یک زیرفضا از R^∞ نیست. دنباله $(3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots)$ را در نظر بگیرید. اگر این دنباله را در $c = -2$ ضرب کنیم یک دنباله صعودی بدست می‌آید که نقض غرض است!

(ج) خب فرض کنید دنباله x_j و y_j دو دنباله همگرا هستند به طوری که

$$\lim_{j\to\infty} x_j = P$$
$$\lim_{j\to\infty} y_j = Q$$

حال داریم،

$$\lim_{j\to\infty} (x_j + y_j) = \lim_{j\to\infty} x_j + \lim_{j\to\infty} y_j = P + Q$$

پس $(x_j + y_j) \in S$. حال فرض کنید c یک اسکالر باشد. حال داریم

$$\lim_{j\to\infty} x_j = L$$
$$\lim_{j\to\infty} (cx_j) = c\left(\lim_{j\to\infty} x_j\right)$$
$$= cL$$

پس دنباله ما در هنگام ضرب در یک اسکالر باز هم معتبر می‌ماند پس در زیرفضای R^∞ هست.

(د) فرض کنیم x و y دو دنباله باشند. برای تست کردن خاصیت جمع داریم:

$$x + y = x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots$$
$$x_2 + y_2 - x_1 - y_1 = d - p$$
$$x_3 + y_3 - x_2 - y_2 = d - p$$

پس خاصیت جمع برقرار است.
برای شرط دوم داریم: $cx_1, cx_2, cx_3, \cdots +$ is cx

$$cx_{\{2\}} - cx_{\{1\}} = cx_{\{3\}} - cx_{\{2\}}$$
$$= cd$$

که باز هم دنباله بالا یک دنباله معتبر هست. پس دنباله مد نظر یک زیرفضای معتبر است.

(ه) جمع دو دنباله هندسی لزوما یک دنباله هندسی تشکیل نمی‌دهد پس شرط اول را رعایت نمی‌کند و بنابراین زیرفضای معتبری نیست.

پرسش ۲ (۲۰ نمره) فضای برداری F و مجموعه‌های

$$U_۱ = \{(x, y, ۰) \in F^۳ | x, y \in F\}$$
$$U_۲ = \{(۰, ۰, z) \in F^۳ | z \in F\}$$
$$U_۳ = \{(۰, y, y) \in F^۳ | y \in F\}$$

مفروض‌اند. نشان دهید $U_۱ + U_۲ + U_۳$ یک جمع مستقیم[۱] نیست.

پاسخ $F^۳ = U_۱ + U_۲ + U_۳$ ، چرا که به ازای هر بردار $(x, y, z) \in F^۳$ میتوان نوشت :

$$(x, y, z) = (x, y, ۰) + (۰, ۰, z) + (۰, ۰, ۰)$$

یه گونه ای که $(x, y, ۰) \in U_۱$ و $(۰, ۰, z) \in U_۲$ و $(۰, ۰, ۰) \in U_۳$ می باشد . $F^۳$ جمع مستقیم $U_۱, U_۲, U_۳$ نمی تواند باشد چرا که بردار $(۰, ۰, ۰)$ را به دو صورت جمع $u_۱ + u_۲ + u_۳$ نوشت به گونه ای که هر $u_j \in U_j$ می باشد . داریم :

$$(۰, ۰, ۰) = (۰, ۱, ۰) + (۰, ۰, ۱) + (۰, -۱, -۱)$$

و همچنین داریم :

$$(۰, ۰, ۰) = (۰, ۰, ۰) + (۰, ۰, ۰) + (۰, ۰, ۰)$$

به گونه ای که بردار های هر معادله به ترتیب از چپ به راست عضو $U_۱$ ، $U_۲$ و $U_۳$ می باشند.

پرسش ۳ (۳۰ نمره)

(آ) (۱۵ نمره) زیر مجموعه‌ای از فضای $\mathbb{R}^۲$ بسازید که روی جمع و تفریق برداری بسته باشد ولی روی ضرب اسکالر بسته نباشد.

(ب) (۱۵ نمره) زیر مجموعه‌ای از فضای $\mathbb{R}^۲$ بسازید که روی ضرب اسکالر بسته باشد ولی روی جمع و تفریق برداری بسته نباشد.

پاسخ

(آ) برای این سوال می‌توان جواب‌های متفاوتی در نظر گرفت. برای نمونه: $\{(x, y) : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$

(ب) برای این سوال می‌توان جواب‌های متفاوتی در نظر گرفت. برای نمونه: $\{(x, ۰) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(۰, y) : y \in \mathbb{R}\}$

پرسش ۴ (۳۰ نمره) در هر یک از بخش‌های زیر، مقادیر حقیقی k را که به ازای آن مجموعه W یک زیر فضا از $\mathbb{R}^۳$ می‌شود را مشخص کنید.

(آ) (۱۵ نمره) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^۳ \mid a^۲ + b^۲ + c^۲ = k\}$

(ب) (۱۵ نمره) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^۳ \mid a + b + c = k\}$

پاسخ

(آ) از آنجایی که $a^۲, b^۲, c^۲$ بزرگتر مساوی صفر هستند، پس باید $k \geq ۰$ باشد.
اگر $k > ۰$ باشد آنگاه $(۰, ۰, ۰) \notin W$.
اگر $k = ۰$ هر دو شرط دیگر زیر فضا بودن برقرار میشود:

$$(a, b, c), (a', b', c') \in W \Rightarrow a + b + c = ۰ \ and \ a' + b' + c' = ۰ \Rightarrow a + b + c + a' + b' + c' = ۰$$
$$\lambda \in R \ , \lambda(a^۲ + b^۲ + c^۲) = ۰$$

(ب) اگر $k \neq ۰$ باشد آنگاه $(۰, ۰, ۰)$ در W قرار نمی گیرد.
اگر k=۰ باشد آنگاه:

$$(a, b, c), (a', b', c') \in W \Rightarrow a + b + c = ۰ \ and \ a' + b' + c' = ۰ \Rightarrow a + b + c + a' + b' + c' = ۰$$
$$\lambda \in R \ , \lambda(a^۲ + b^۲ + c^۲) = ۰$$

پس W زیر فضای $R^۳$ است.

پرسش ۵ (۲۰ نمره) مجموعه $F = \{۰, e, a, b\}$ مفروض است. جمع و ضرب بر روی این مجموعه به صورت زیر تعریف می‌شود.
فرض کنید که F خاصیت توزیع‌پذیری و شرکت پذیری را دارا باشد.

(آ) (۱۰ نمره) آیا F معرف یک حلقه[۲] است؟

---

[۱] Direct sum
[۲] Ring

$+$	0	e	a	b
0	0	e	a	b
e	e	0	b	a
a	a	b	0	e
b	b	a	e	0

$.$	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	a	b	e
b	0	b	e	a

(ب) (۱۰ نمره) آیا F معرف یک میدان[۳] است؟

پاسخ

(آ) F یک حلقه است اگر شروط زیر برقرار باشد:

- $(F, +)$ یک گروه جابه جا پذیر باشد
- عملیات $\times$ در F خاصیت جا به جا پذیری داشته باشد.
- F خاصیت توزیع پذیری داشته باشد.

دو شرط آخر طبق صورت سوال برقرار هستند، حال به بررسی شرط اول می پردازیم.
عنصر صفر ، عنصر identity است:
$a + ۰ = ۰ + a = a \ and \ b + ۰ = ۰ + b = b \ and \ e + ۰ = ۰ + e = e$
خاصیت inverse داشته باشد:
$a + a = ۰ \ and \ b + b = ۰ \ and \ e + e = ۰$
هر سه شرط برقرار است، پس F یک حلقه است.

(ب) F یک میدان است اگر شروط زیر برقرار باشد

- $(F, +)$ یک گروه جابه جا پذیر باشد
- F خاصیت توزیع پذیری داشته باشد.
- $(F - ۰, \times)$ یک گروه جابه جاپذیر باشد.

دو شرط اول طبق صورت سوال برقرار هستند، حال به بررسی شرط آخر می پردازیم.
عنصر e عنصر identity است.
هر عنصر غیر صفر یک معکوس دارد:
$a \times b \ and \ b \times a \ and \ e \times e$
هر سه شرط برقرار است، پس F یک میدان است.

پرسش ۶ (۱۵ نمره) با تشکیل ماتریس افزوده و یافتن فرم کاهش یافته سطری پلکانی، چند جمله‌ای درجه سوم $p(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ را به نحوی بیابید که

$$p(۱) = ۱, p'(۱) = ۵, p(-۱) = ۳, p'(-۱) = ۱$$

پاسخ

با گرفتن مشتق و در نظر گرفتن برابری‌ها ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال با استفاده از سه Operation Row Elementry موجود فرم کاهش یافته سطری پلکانی را محاسبه می‌کنیم:

$$\to R_2 = R_2 - 3R_1 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to R_3 = R_3 + R_1 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[۳] Field

$$\to R_4 = R_4 - 3R_1 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\to R_2 = -R_2 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\to R_1 = R_1 - R_2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\to R_3 = R_3 - 2R_2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\to R_4 = R_4 + 5R_2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\to R_3 = -R_3/4 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\to R_1 = R_1 + R_3 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\to R_2 = R_2 - 2R_3 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\to R_4 = R_4 - 8R_3 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to R_4 = R_4/4 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to R_1 = R_1 + R_4 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to R_2 = R_2 - R_4 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to R_3 = R_3 - R_4 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه معادله مورد نظر برابر خواهد بود با:

$$p(x) = 2x^3 + 1x^2 - 3x + 1$$

پرسش‌های عملی (۳۰ نمره)

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۸/۹ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹ ، با تاخیر: ۱۴۰۱/۸/۱۴ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

پرسش ۱ (۳۰ نمره) فرض کنید رباتی داریم که در فضای ۳ بعدی جابجا می‌شود و می‌خواهد به سمت هدفی که ما در یک صفحه‌ی مثلثی مشخص کرده‌ایم، تیراندازی کند. صفحه را برای هر تیراندازی جابه‌جا می‌کنیم و ربات ما هم هر بار قدری جابجا شده و جهت هدف‌گیری‌اش را تغییر میدهد. ما می‌خواهیم قبل از این که رباتمان شلیک کند، با توجه به مبدا ربات و جهت هدف‌گیری‌اش نقطه اصابت را تشخیص داده و فاصله اش تا هدف را بدست آوریم. در واقع ورودی‌هایمان، مختصات رئوس صفحه مثلثی، نقطه هدف، محل ربات و جهت هدف‌گیری‌اش در هر سری تیراندازی بوده و خروجی‌مان نیز نقطه اصابت تیر و فاصله آن تا هدف مورد نظر ماست.

نکته تیر ممکن است به خارج از مثلث برود که در این صورت باید گزارش شود.

نکته فرض کنید همه چیز در شرایط ایده‌آل انجام شده و گرانش و اتلاف انرژی نداریم.

ورودی

در خط اول n آمده که تعداد مراحل تست هدف گیری رباتمان میباشد. در هر ۶ خط بعدی که مربوط به یک مرحله می باشد، به ترتیب مختصات راس‌های صفحه‌ی مثلثمان در فضای ۳ بعدی، مختصات هدف، مختصات مبدا هدف‌گیری یا همان ربات و در آخر، برداری که در جهت هدف‌گیری ربات می باشد، آمده است.

خروجی

برای هر مرحله به ترتیب در صورتی که محاسباتمان نشان دهد که برای هر مرحله در صورتی که محاسبات نشان دهد که تیر به صفحه اصابت نخواهد کرد باید outside the triangle! چاپ شود و در غیر این صورت باید در یک خط مختصات پیش‌بینی شده برای اصابت تیر و فاصله‌ی آن تا هدف چاپ شود. دقت شود که مختصات به صورت $[x\ y\ z]$میباشد که مولفه‌های x، y و z و همچنین فاصله تا هدف همگی باید به یک رقم اعشار گرد شده و چاپ شوند.

ورودی نمونه ۱

```
3
0 1 1.50
1 0 1.25
-1 0 1.00
0.5 0.3 1.3
0 0 0
0.1 0.1 1
0.5 2 2
-0.5 0.5 1.5
-2 0.5 1
-0.55 1.1 1.55
0 0.5 0
0.3 0.2 0.5
0 1 1.50
1 0 1.25
-1 0 1.00
0.5 0.3 1.3
0 0 0
0 -1 -1
```

خروجی نمونه ۱

```
[0.1 0.1 1.2] 0.4
outside the triangle!
outside the triangle!
```

ورودی و خروجی‌های نمونه

به پیوست تمرین ورودی و خروجی نمونه ۱ به همراه یک ورودی و خروجی نمونه دیگر در قالب فایل txt تقدیم شده است.

کتابخانه‌های مجاز

در این تمرین تنها مجاز به استفاده از NumPy در کنار کتابخانه‌های داخلی زبان پایتون هستید.

نحوه تحویل

پاسخ خود را در قالب یک فایل Python بنویسید و در کوئرا آپلود کنید. نمره‌دهی به وسیله سامانه داوری خودکار انجام خواهد شد.

پاسخ

```python
import numpy as np
def find_intersection(a, b, c, target, source, direction):
    AB = b - a
    AC = c - a
    direction = direction / np.linalg.norm(direction)
    n = np.cross(AB, AC)
    n_ = n / np.linalg.norm(n)
    d = - np.dot(n_, a)
    t = - (np.dot(n_, source) + d) / np.dot(n_, direction)
```

```
    P = source + t * direction
    ab = b - a
    ac = c - a
    s = np.linalg.norm(np.cross(ab, ac)) / 2
    pa = a - P
    pb = b - P
    pc = c - P
    a_ = np.linalg.norm(np.cross(pb, pc)) / (2 * s)
    b_ = np.linalg.norm(np.cross(pc, pa)) / (2 * s)
    c_ = np.linalg.norm(np.cross(pa, pb)) / (2 * s)
    if (a_ + b_ + c_ - 1 <= 0.0001) and a_ <= 1 and b_ <= 1 and c_ <= 1:
        dist = np.linalg.norm(P - target)
        print('[{:.1f} {:.1f} {:.1f}] {:.1f}'.format(P[0], P[1], P[2], dist))
    else:
        print("outside the triangle!")
def get_point():
    return np.array(list(map(float, input().split())))


def from_std_io() -> None:
    n = int(input())
    for i in range(n):
        a, b, c, target, source, direction = (get_point() for _ in range(6))
        find_intersection(a, b, c, target, source, direction)

from_std_io()
```