به نام خداوند بخشنده مهربان

# جبر خطی

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۱

تمرین دوم: ترکیب و استقلال

## پرسش‌های عملی (۱۴۰ نمره)

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۰۸/۲۸ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۰۹/۳ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

**پرسش ۱** (۱۵ نمره) فرض کنید ماتریس $M_{n\times m}$ متشکل از بردارهای ستونی $b_1,\ldots b_m$ وجود دارد. ثابت کنید که بردار $v\in\mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که بتوان آن را به صورت ترکیب خطی از این بردارهای ستونی نوشت اگر و تنها اگر بردار $x$ وجود داشته باشد که در معادله‌ی $Mx=v$ صدق کند.

**پرسش ۲** (۳۰ نمره) در مورد هر یک از توابعی که در ادامه آمده‌اند تعیین کنید که آیا خطی هستند؟ در صورت خطی بودن آنها را به صورت ضرب داخلی نمایش داده:

$$f(x)=a^Tx$$

و در صورت غیرخطی بودن $x,\ y,\ \alpha,\ \beta$ هایی ارائه دهید که برای آنها اصل برهم‌نهی برقرار نباشد:

$$f(\alpha x+\beta y)\neq \alpha f(x)+\beta f(y)$$

(آ) (۷.۵ نمره) گستره مقادیر بردار: $f(x)=max_kx_k-min_kx_k$

(ب) (۷.۵ نمره) تفاوت آخرین و اولین عنصر: $f(x)=x_n-x_1$

(ج) (۷.۵ نمره) میانه برداری در فضای $\mathbb{R}^n$

(د) (۷.۵ نمره) تفاضل میانگین درایه‌های دارای اندیس فرد با میانگین درایه‌های دارای اندیس زوج

**پرسش ۳** (۳۰ نمره)

(آ) (۱۵ نمره) اگر بردارهای $a_1,a_2,a_3$ وابسته خطی و بردارهای $a_2,a_3,a_4$ مستقل خطی باشند. نشان دهید که $a_1$ ترکیب خطی از $a_2$ و $a_3$ است و $a_4$ ترکیب خطی از بردارهای $a_1,a_2,a_3$ نیست.

(ب) (۱۵ نمره) بردارهای $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ مستقل خطی‌اند. اگر بردار $u$ ترکیب خطی از $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ باشد و بردار $v$ ترکیب خطی این بردارها نباشد نشان دهید که بردارهای $tu+v,\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ برای هر مقدار عددی $t$ مستقل خطی‌اند.

**پرسش ۴** (۱۵ نمره) فرض کنید $K=\mathrm{Span}\{v_1,v_2,v_3\}$ و $H=\mathrm{Span}\{u_1,u_2,u_3\}$ و داریم:

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-1\end{bmatrix},\ u_2=\begin{bmatrix}0\\2\\-1\\1\end{bmatrix},\ u_3=\begin{bmatrix}3\\4\\1\\-4\end{bmatrix},$$

$$v_1=\begin{bmatrix}-2\\-2\\-1\\3\end{bmatrix},\ v_2=\begin{bmatrix}2\\3\\2\\-6\end{bmatrix},\ v_3=\begin{bmatrix}-1\\4\\6\\-2\end{bmatrix}$$

پایه‌هایی برای $H$، $K$ و $H+K$ بیابید.

**پرسش ۵** (۲۰ نمره)

(آ) (۱۵ نمره) $S$ یک زیر مجموعه افاین از $\mathbb{R}^n$ است. فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ یک تبدیل خطی است و $f(S)$ مجموعه تصاویر $\{f(x):x\in S\}$ را نشان میدهد. اثبات کنید $f(S)$ زیرمجموعه افاین $\mathbb{R}^m$ است.

(ب) (۱۵ نمره) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ یک تبدیل خطی است. فرض کنید $T$ یک زیرمجموعه افاین $\mathbb{R}^m$ و $S=\{x\in\mathbb{R}^n: f(x)\in T\}$ باشد. نشان دهید که $S$ یک زیرمجموعه افاین $\mathbb{R}^n$ است.

**پرسش ۶** (۳۰ نمره) فرض کنید:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix},\ v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

و $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . مشخص کنید آیا $p_1$ و $p_2$ در $conv\ S$ وجود دارند؟

## پرسش‌های تئوری (۴۰ نمره)

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۰۸/۳۰ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۰۹/۵ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

**پرسش ۱** (۴۰ نمره)

در یکی از روستاهای قدیمی ایران، هرساله مسابقات پرتاب نیزه برگزار می‌شود ولی نه به صورت عادی! این مسابقات قوانین خاص خود را دارد.

در این مسابقات، رنگ نیزه هر ورزشکار متمایز و مخصوص خودش است.

نحوه برگزاری این مسابقات به این صورت است که هر ورزشکار یکبار n نیزه پرتاب می‌کند و سپس امتیازدهی و تشخیص برنده دو به دو صورت می‌گیرد.

نحوه امتیازدهی با مسابقات عادی فرق دارد!

نحوه انتخاب برنده بدین صورت است که داور مسابقه محدوده محاصره شده توسط نیزه‌های هرفرد را بدست می‌آورد و تعداد نیزه هایی که روی مرز این محدوده نیستند امتیاز فرد را مشخص می‌کند.

نحوه بدست آوردن محدوده هر فرد به گونه‌ای است که داورها کوچکترین محدوده‌ی محدبی که شامل تمام نیزه‌های آن ورزشکار می‌شود را بدست می‌آورند.

بعد از بدست آوردن امتیازها، فرد برنده، نیزه‌های فرد بازنده را صاحب می‌شود. حال امتیازدهی بین دو ورزشکار برنده با اضافه شدن نیزه‌هایی که به غنیمت برده اند صورت می‌گیرد. داور بار دیگر محدوده ۲ بازیکن برنده را محاسبه می‌کند و امتیازدهی می‌کند و برنده مسابقات را اعلام می‌کند.

همچنین می‌دانیم نیزه هیچ کس روی نیزه فرد دیگری نمی‌افتد.

امسال مسابقات با مشکل کمبود داور برخورده است و با توجه به اهمیت افراد این روستا به این رسم قدیمی، از شما تقاضا کرده اند در داوری این مسابقه به این روستا کمک کنید.

نفرات ۱ و ۲ و نفرات ۳ و ۴ بایکدیگر مسابقه می‌دهند و برنده آنها به دیدار نهایی می‌رود. توجه داشته باشید که تضمین می‌شود هیچگاه امتیاز دو نفری که با هم مسابقه می‌دهند برابر نمی‌شود و حالت تساوی رخ نمی‌دهد. همچنین برای سادگی مسئله تضمین می‌شود در هیچ مرحله مسابقات هیچ ۳ نیزه متعلق به یک نفر روی یک خط قرار ندارند.

### ورودی

ابتدا $n > 3$ تعداد نیزه‌های هر فرد وارد می‌شود، سپس در هر $n$ خط بعدی به ترتیب مختصات نیزه ورزشکاران وارد می‌شود.

طول و عرض هر مختصات می‌تواند یک عدد با حداکثر دو رقم اعشار بین ۱۰۰۰۰− و ۱۰۰۰۰ باشد.

### خروجی

شماره و امتیاز فرد قهرمان

### ورودی نمونه ۱

```
4
-10 4
1 -5
0 6
-5 -1
-9 -10
4 4
-9 9
8 3
9 -5
-4 -3
7 1
-8 -10
-3 -1
-2 9
-4 -6
5 -6
```

### خروجی نمونه ۱

```
Winner = 4
Score = 4
```

### ورودی نمونه ۲

```
5
3.01 5.97
-8.77 -0.33
-1.47 3.73
5.36 8.49
4.33 7.41
-7.6 6.97
3.26 8.57
-6.38 2.82
1.61 4.62
-7.57 -0.28
-9.94 8.35
3.19 -2.33
5.44 -3.23
-7.42 8.64
0.32 9.67
-7.27 -5.07
8.99 2.65
1.91 -7.91
0.92 -8.69
-0.94 -9.78
```

### خروجی نمونه ۲

```
Winner = 1
Score = 3
```