به نام خداوند بخشنده مهربان

# جبر خطی


حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی


بهار ۱۴۰۱

تمرین دوم: ترکیب و استقلال

## پرسش‌های تئوری (۱۴۰ نمره)

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۰۸/۲۸ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۰۹/۰۳ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

**پرسش ۱** (۱۵ نمره) فرض کنید ماتریس $M_{n\times m}$ متشکل از بردارهای ستونی $b_۱, \dots b_m$ وجود دارد. ثابت کنید که بردار $v \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که بتوان آن را به صورت ترکیب خطی از این بردارهای ستونی نوشت اگر و تنها اگر بردار $x$ وجود داشته باشد که در معادله‌ی $Mx = v$ صدق کند.

**پاسخ** فرض کنید بردار $v \in \mathbf{R}^n$ ترکیب خطی از بردار های $b_۱, b_۲, \dots b_m$ می‌باشد:

$$a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \cdots + a_mb_m = v$$

حال بردار x را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم.

$$x = \begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

پس داریم $\mathbf{M}x = v$

حال از طرف دیگر اثبات می‌کنیم. فرض کنیم داریم $Mx = v$ و $x = \begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ در این صورت:

$$Mx = a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \cdots + a_mb_m = v$$

پس v به صورت ترکیب خطی از بردارهای ستونی نوشته شد.

از هر طرف، طرف دیگر را نتیجه گرفتیم درنتیجه اثبات کامل می‌شود.

**پرسش ۲** (۳۰ نمره) در مورد هر یک از توابعی که در ادامه آمده‌اند تعیین کنید که آیا خطی هستند؟ در صورت خطی بودن آنها را به صورت ضرب داخلی نمایش داده:

$$f(x) = a^Tx$$

و در صورت غیرخطی بودن $x, y, \alpha, \beta$ هایی ارائه دهید که برای آنها اصل برهم‌نهی برقرار نباشد:

$$f(\alpha x + \beta y) \neq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

(آ) (۷.۵ نمره) گستره مقادیر بردار: $f(x) = max_k x_k - min_k x_k$

(ب) (۷.۵ نمره) تفاوت آخرین و اولین عنصر: $f(x) = x_n - x_۱$

(ج) (۷.۵ نمره) میانه برداری در فضای $\mathbb{R}^n$

(د) (۷.۵ نمره) تفاضل میانگین درایه‌های دارای اندیس فرد با میانگین درایه‌های دارای اندیس زوج

**پاسخ**

(آ) غیرخطی، نقاط $x = (۱, ۰), y = (۰, ۱), \alpha = \beta = ۱/۲$ . در نتیجه $\alpha x + \beta y = (۱/۲, ۱/۲)$ و $f(x) = f(y) = ۱$، پس:

$$f(\alpha x + \beta y) = ۰ \neq \alpha f(x) + \beta f(y) = ۱$$

(ب) خطی، تابع را می توان به صورت ضرب داخلی نمایش داد:

$$a = (-۱, ۰, \dots, ۰, ۱)$$

(ج) غیرخطی، نقاط $x = (-۱, ۰, ۲), y = (۲, -۱, ۰), \alpha = \beta = ۱$ . در نتیجه $\alpha x + \beta y = (۱, -۱, ۲)$ و $f(x) = f(y) = ۰$، پس:

$$f(\alpha x + \beta y) = ۱ \neq \alpha f(x) + \beta f(y) = ۰$$

(د) خطی، تابع را می توان به صورت ضرب داخلی نمایش داد، اگر تعداد درایه‌های بردار زوج باشد ($n = ۲m$):

$$a = (۱/m, -۱/m, ۱/m, -۱/m, \ldots, ۱/m, -۱/m)$$

همچنین اگر تعداد درایه های بردار فرد باشد($n = ۲m + ۱$):

$$a = (۱/(m+۱), -۱/m, ۱/(m+۱), -۱/m, \ldots, ۱/(m+۱))$$

**پرسش ۳** (۳۰ نمره)

(آ) (۱۵ نمره) اگر بردارهای $a_۱, a_۲, a_۳$ وابسته خطی و بردارهای $a_۲, a_۳, a_۴$ مستقل خطی باشند. نشان دهید که $a_۱$ ترکیب خطی از $a_۲$ و $a_۳$ است و $a_۴$ ترکیب خطی از بردارهای $a_۱, a_۲, a_۳$ نیست.

(ب) (۱۵ نمره) بردارهای $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_r$ مستقل خطی‌اند. اگر بردار $u$ ترکیب خطی از $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_r$ باشد و بردار $v$ ترکیب خطی این بردارها نباشد نشان دهید که بردارهای $tu + v, \alpha_۱, \ldots, \alpha_r$ برای هر مقدار عددی $t$ مستقل خطی‌اند.

**پاسخ**

(آ) بردارهای $a_۱, a_۲, a_۳$ وابسته خطی‌اند پس $x_۱a_۱ + x_۲a_۲ + x_۳a_۳ = ۰$ برقرار است به صورتی که تمام ضرایب صفر نباشند. از طرفی می‌دانیم $x_۱$ نمی‌تواند صفر باشد زیرا در این صورت $a_۲$ و $a_۳$ وابسته خطی می‌شوند که با فرضیات سوال در تضاد است. پس می‌توان نوشت:

$$a_۱ = (-\frac{x_۲}{x_۱})a_۲ + (-\frac{x_۳}{x_۱})a_۳$$

پس $a_۱$ ترکیب خطی از $a_۳$ و $a_۲$ می‌باشد.
برای قسمت بعدی سوال فرض کنید که $a_۴$ ترکیب خطی از سه بردار دیگر باشد:

$$y_۱a_۱ + y_۲a_۲ + y_۳a_۳ = a_۴$$

با استفاده از نتیجه قسمت قبل داریم:

$$y_۱((-\frac{x_۲}{x_۱})a_۲ + (-\frac{x_۳}{x_۱})a_۳) + y_۲a_۲ + y_۳a_۳ = a_۴$$

در این حالت $a_۴$ را به صورت ترکیب خطی از $a_۳$ و $a_۲$ نوشتیم که با فرض استقلال خطی آن ها در تضاد است.

(ب) فرض کنید $a_۰(tu + v) + a_۱\alpha_۱ + \cdots + a_r\alpha_r = ۰$ با ضرایب $a_۰, \ldots, a_r$ برقرار است. می‌دانیم $a_۰$ باید برابر با صفر باشد زیرا در غیر این صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a_۱}{a_۰}\alpha_۱ + \cdots + \frac{a_r}{a_۰}\alpha_r + tu = -v$$

و چون u خود ترکیب خطی از بردار های ماست پس v ترکیب خطی از بردار ها می‌شود که با فرض سوال در تناقض است. حال که $a_۰ = ۰$ است و با توجه به مستقل خطی بودن بردارهای $\alpha_۱, \ldots, \alpha_r$ می‌فهمیم $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_r = ۰$ در نتیجه، بردارهای $tu + v, \alpha_۱, \ldots, \alpha_r$ برای هر مقدار عددی $t$ مستقل خطی‌اند.

**پرسش ۴** (۱۵ نمره) فرض کنید $K = \text{Span}\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ و $H = \text{Span}\{u_۱, u_۲, u_۳\}$ و داریم:

$$u_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}, \ u_۲ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \\ -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \ u_۳ = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \\ ۱ \\ -۴ \end{bmatrix},$$

$$v_۱ = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}, \ v_۲ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۲ \\ -۶ \end{bmatrix}, \ v_۳ = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \\ ۶ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

پایه‌هایی برای $H$، $K$ و $H + K$ بیابید.

**پاسخ** برای یافتن پایه‌های هر کدام از این فضاها باید زیرمجموعه مستقل خطی از مجموعه بردارهای تشکیل دهنده آن ها پیدا کنیم.

$$[u_۱ \quad u_۲ \quad u_۳] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۲ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۴ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس $\{u_1, u_2\}$ پایه برای H هستند.

$$[v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس $\{v_1, v_2, v_3\}$ پایه برای K هستند.

$$[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & -4 & 3 & -6 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس $\{u_1, u_2, v_2, v_3\}$ پایه برای K + H هستند

**پرسش ۵** (۳۰ نمره)

(آ) (۱۵ نمره) $S$ یک زیر مجموعه افاین از $\mathbb{R}^n$ است. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ یک تبدیل خطی است و $f(S)$ مجموعه تصاویر $\{f(x) : x \in S\}$ را نشان میدهد. اثبات کنید $f(S)$ زیرمجموعه افاین $\mathbb{R}^m$ است.

(ب) (۱۵ نمره) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ یک تبدیل خطی است. فرض کنید $T$ یک زیرمجموعه افاین $\mathbb{R}^m$ و $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in T\}$ باشد. نشان دهید که $S$ یک زیرمجموعه افاین $\mathbb{R}^n$ است.

**پاسخ**

(آ) می‌دانیم که اگر $p, q \in f(S)$ در نتیجه وجود دارد $r, s \in S$ به طوری‌که $f(r) = p$ و $f(s) = q$ طبق تعریف مجموعه افاین، یک مجموعه افاین است اگر و تنها اگر به ازای هر دو نقطه درون آن مجموعه، ترکیب افاین آنها نیز درون آن مجموعه باشد، بنابراین باید ثابت کنیم به ازای هر $t \in \mathbb{R}$، $z = (1-t)p + tq$ درون $f(S)$ قرار دارد.
از آنجایی که $f$ یک تبدیل خطی است:

$$z = (1-t)p + tq = (1-t)f(r) + tf(s) = f((1-t)r + ts)$$

با توجه به اینکه $S$ یک مجموعه افاین است، $(1-t)r + ts \in S$ و در نتیجه $z$ درون $f(S)$ قرار دارد و طبق تعریف گفته شده $f(S)$ زیرمجموعه افاین $\mathbb{R}^m$ است.

(ب) در این قسمت نیز اثبات را با توجه به قضیه: یک مجموعه افاین است اگر و تنها اگر به ازای هر دونقطه درون آن ترکیب افاین آنها نیز درون آن مجموعه باشد انجام می‌دهیم، پس $x, y \in S$ و $t \in \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم، با توجه اینکه $f$ یک تبدیل خطی است، داریم:

$$f((1-t)x + ty) = (1-t)f(x) + tf(y)$$

همچنین از آنجایی که $f(x) \in T$ و $f(y) \in T$ و اینکه $T$ یک مجموعه افاین است، درنتیجه: $(1-t)f(x) + tf(y) \in T$ که نتیجه می‌دهد: $[(1-t)x + ty] \in S$ بنابراین باتوجه به قضیه گفته شده $S$ زیرمجموعه افاین $\mathbb{R}^n$ است.

**پرسش ۶** (۲۰ نمره) فرض کنید:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

و $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . مشخص کنید آیا $p_1$ و $p_2$ در $conv\, S$ وجود دارند؟

**پاسخ** ابتدا ماتریس $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & p_1 & p_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ را تشکیل داده و سپس با اعمال سطری مقدماتی آن را به ماتریس پلکانی کاهش یافته تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

توجه داشته باشید وجود سطری از یک‌ها در ماتریس فوق همان شرط مجموع ضرایب مساوی یک بودن را ایفا می‌کند و به نوعی شرط affine بودن را روی ضرایب می‌گذارد. در ادامه پس از محاسبه ضرایب کافی است چک کنیم آیا این ضرایب غیرمنفی هستند یا خیر تا از محدب بودن ترکیب این بردارها اطمینان حاصل کنیم. با تشکیل معادلات به راحتی می‌توان $p_1$ و $p_2$ را برحسب بردارهای $v_1, v_2, v_3, v_4$ نوشت:

$$p_1 = -\frac{1}{6}v_1 + \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{3}v_3 + \frac{1}{6}v_4, \;\; p_2 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{6}v_3 + \frac{1}{6}v_4$$

طبق تعریف $p_۱$ یک ترکیب محدب از مجموعه برداری $S$ نیست زیرا تمامی ضرایب ترکیب خطی فوق بزرگ تر یا برابر با صفر نیستند که این شرط ترکیب محدب بودن را نقض می‌کند، اما $p_۲$ طبق تعریف یک ترکیب محدب از مجموعه برداری $S$ است. بنابراین $p_۲$ در مجموعه محدب $S$ قرار دارد اما $p_۱$ خیر.

## پرسش‌های عملی (۳۰ نمره)

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۰۸/۳۰ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۰۹/۰۵ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

**پرسش ۱** (۳۰ نمره)

در یکی از روستاهای قدیمی ایران، هرساله مسابقات پرتاب نیزه برگزار می‌شود ولی نه به صورت عادی! این مسابقات قوانین خاص خود را دارد.

در این مسابقات، رنگ نیزه هر ورزشکار متمایز و مخصوص خودش است.

نحوه برگزاری این مسابقات به این صورت است که هر ورزشکار یکبار n نیزه پرتاب می‌کند و سپس امتیازدهی و تشخیص برنده دو به دو صورت می‌گیرد.

نحوه امتیازدهی با مسابقات عادی فرق دارد!

نحوه انتخاب برنده بدین صورت است که داور مسابقه محدوده محاصره شده توسط نیزه‌های هرفرد را بدست می‌آورد و تعداد نیزه هایی که روی مرز این محدوده نیستند امتیاز فرد را مشخص می‌کند.

نحوه بدست آوردن محدوده هر فرد به گونه‌ای است که داورها کوچکترین محدوده‌ی محدبی که شامل تمام نیزه‌های آن ورزشکار می‌شود را بدست می‌آورند.

بعد از بدست آوردن امتیازها، فرد برنده، نیزه‌های فرد بازنده را صاحب می‌شود. حال امتیازدهی بین دو ورزشکار برنده با اضافه شدن نیزه‌هایی که به غنیمت برده اند صورت می‌گیرد. داور بار دیگر محدوده ۲ بازیکن برنده را محاسبه می‌کند و امتیازدهی می‌کند و برنده مسابقات را اعلام می‌کند.

همچنین می‌دانیم نیزه هیچ کس روی نیزه فرد دیگری نمی‌افتد.

امسال مسابقات با مشکل کمبود داور برخورده است و با توجه به اهمیت افراد این روستا به این رسم قدیمی، از شما تقاضا کرده اند در داوری این مسابقه به این روستا کمک کنید.

نفرات ۱ و ۲ و نفرات ۳ و ۴ بایکدیگر مسابقه می‌دهند و برنده آنها به دیدار نهایی می‌رود. توجه داشته باشید که تضمین می‌شود هیچگاه امتیاز دو نفری که با هم مسابقه می‌دهند برابر نمی‌شود و حالت تساوی رخ نمی‌دهد. همچنین برای سادگی مسئله تضمین می‌شود در هیچ مرحله مسابقات هیچ ۳ نیزه متعلق به یک نفر روی یک خط قرار ندارند.

### ورودی

ابتدا $n > ۳$ تعداد نیزه‌های هر فرد وارد می‌شود، سپس در هر $n$ خط بعدی به ترتیب مختصات نیزه ورزشکاران وارد می‌شود.

طول و عرض هر مختصات می‌تواند یک عدد با حداکثر دو رقم اعشار بین ۱۰۰۰۰− و ۱۰۰۰۰ باشد.

### خروجی

شماره و امتیاز فرد قهرمان

### ورودی نمونه ۱

```
4
-10 4
1 -5
0 6
-5 -1
-9 -10
4 4
-9 9
8 3
9 -5
-4 -3
7 1
-8 -10
-3 -1
-2 9
-4 -6
5 -6
```

### خروجی نمونه ۱

```
Winner = 4
Score = 4
```

### ورودی نمونه ۲

```
5
3.01 5.97
-8.77 -0.33
-1.47 3.73
5.36 8.49
4.33 7.41
-7.6 6.97
3.26 8.57
-6.38 2.82
1.61 4.62
-7.57 -0.28
-9.94 8.35
3.19 -2.33
5.44 -3.23
-7.42 8.64
0.32 9.67
-7.27 -5.07
8.99 2.65
1.91 -7.91
0.92 -8.69
-0.94 -9.78
```

### خروجی نمونه ۲

```
Winner = 1
Score = 3
```

### پاسخ

این یک پاسخ نمونه بالای کد است.

```
import numpy as np
from functools import cmp_to_key

global l_point


def set_lowest_point(points):
    lowest_index = np.argmin(points, axis=0)[0]
    points[lowest_index], points[0] = points[0], points[lowest_index]
    return points


def outer_product(v1, v2):
    return v1[0] * v2[1] - v1[1] * v2[0]
```

```python


def compare(p1, p2):
    global l_point
    v1 = l_point - p1
    v2 = p2 - l_point

    q = outer_product(v1, v2)
    if q == 0:
        if np.linalg.norm(v1) < np.linalg.norm(v2):
            return -1
        else:
            return 1
    else:
        if q > 0:
            return -1
        else:
            return 1


def sort_points_by_polar_degree(points):
    global l_point

    points = set_lowest_point(points)
    l_point = points.pop(0)
    points = [l_point] + sorted(points, key=cmp_to_key(compare))
    return points


def compute_score(points):
    points = sort_points_by_polar_degree(points)
    modified_points = [points[0]]
    n = len(points)
    i = 1
    while i < n:
        while i < n - 1:
            if outer_product(points[i], points[i + 1]) == 0:
                i += 1
            else:
                break
        modified_points.append(points[i])
        i += 1

    S = modified_points[:3]
    for i in range(3, len(modified_points)):
        while len(S) > 1 and outer_product(S[-1] - S[-2], modified_points[i] - S[-1]) > 0:
            S.pop()
        S.append(modified_points[i])
    border_points = S
    final_borders = []
    for i in range(len(border_points)):
        p1 = border_points[i]
        final_borders.append(p1)
        p2 = border_points[(i + 1) % len(border_points)]
        for point in points:
            if np.equal(point, p1).all() or np.equal(point, p2).all(): continue
            if outer_product(point - p1, p2 - point) == 0:
                final_borders.append(point)
    return len(points) - len(border_points)


n = int(input())
shots = np.zeros((4, n, 2))

for i in range(4):
    for j in range(n):
        shots[i, j] = np.array(list(map(float, input().split())))
winner1 = -1

if compute_score(list(shots[0])) > compute_score(list(shots[1])):
    winner1 = 1
    winner1_points = np.append(shots[0], shots[1], axis=0)
else:
```

```python
    winner1 = 2
    winner1_points = np.append(shots[1], shots[0], axis=0)

if compute_score(list(shots[2])) > compute_score(list(shots[3])):
    winner2 = 3
    winner2_points = np.append(shots[2], shots[3], axis=0)
else:
    winner2 = 4
    winner2_points = np.append(shots[2], shots[3], axis=0)

p1 = compute_score(list(winner1_points))
p2 = compute_score(list(winner2_points))

if p1 > p2:
    print('Winner =', winner1)
    print('Score =', p1)
else:
    print('Winner =', winner2)
    print('Score =', p2)
```