



جبر خطی

حمیدرضا ربیعی، مریم رضایی
بهار ۱۴۰۱

تمرین چهارم: ماتریس‌ها

پرسش‌های تئوری (۱۴۰ نمره)

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۱۰/۶ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۱۰/۱۱ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

پرسش ۱ (۵ نمره) فرض کنید U زیرفضایی در V باشد و داشته باشیم $U \neq V$. تبدیل خطی S از زیرفضای U به زیرفضای V در نظر بگیرید به طوری که وجود داشته باشد $u \in U$ به طوری که $Su \neq 0$. تبدیل T را به صورت زیر تعریف میکنیم.

$$T(v) = \begin{cases} Sv & \text{if } v \in U \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

نشان دهید که تبدیل T خطی نمی‌باشد.

پرسش ۲ (۱۵ نمره) فرض کنید ماتریس $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ و همچنین $\text{Rank}(A) = 1$ و $\text{Trace}(A) = 0$ نشان دهید که به ازای هر $k > 1$ داریم $A^k = 0$.

پرسش ۳ (۲۰ نمره) فرض کنید ماتریس P یک ماتریس جایگشت باشد. در اینصورت:

(آ) (۵ نمره) نشان دهید $PP^T = I$.

(ب) (۵ نمره) نشان دهید که P^T هم یک ماتریس جایگشت است.

(ج) (۱۰ نمره) ثابت کنید وجود دارد k طبیعی به صورتی که $P^k = I$.

پرسش ۴ (۵۰ نمره)

(آ) (۱۲ نمره) A یک ماتریس دلخواه $n \times n$ می‌باشد و B هم ماتریس $n \times n$ می‌باشد که همه درایه‌های آن یک است. ثابت کنید:

$$\text{Rank}(A) - 1 \leq \text{Rank}(A - B)$$

(ب) (۱۲ نمره) ماتریس‌های A و B ماتریس‌های دلخواه $n \times n$ می‌باشند. ثابت کنید اگر داشته باشیم $AB = BA$ آنگاه نامساوی زیر برقرار است.

$$\text{Rank}(A + B) + \text{Rank}(AB) \leq \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B)$$

(ج) (۱۳ نمره) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ و دلخواه باشد و همچنین داشته باشیم $A^2 = 0$. نشان دهید:

$$\text{Rank}(A + A^T) = 2\text{Rank}(A)$$

(د) (۱۳ نمره) نشان دهید اگر $Q \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ و $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ماتریس‌های مربعی و فول‌رنگ باشند و $A_{m \times n}$ ماتریسی دلخواه باشد داریم:

$$\text{Rank}(QA) = \text{Rank}(A) = \text{Rank}(AP)$$

پرسش ۵ (۳۵ نمره) فرض کنید A ماتریس $m \times n$ باشد و $m \geq n$ ، موارد زیر را اثبات کنید:

(آ) (۱۰ نمره) نشان دهید که ماتریس B و C وجود دارند که در معادله زیر صدق میکنند.

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -A^T & I_n \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - A^T A \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} I_n & -A^T \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m - AA^T \end{bmatrix}$$

که I_k ماتریسی همانی با k سطر و ستون می‌باشد.

(ب) (۱۵ نمره) نشان دهید $\text{Rank}(I_m - AA^T) - \text{Rank}(I_n - A^T A) = m - n$.

پرسش ۶ (۱۵ نمره) تبدیل خطی $T_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف میکنیم.

$$T_1(x) = \begin{bmatrix} e_1^T x \\ (e_2 + e_3)^T x \end{bmatrix}$$

همچنین تبدیل $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را دوران به اندازه ۹۰ درجه تعریف میکنیم.

$$T_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

همچنین $T_2 \circ T_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت ترکیب T_1 و بعد T_2 تعریف میکنیم.

$$(T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x))$$

(آ) (۷ نمره) مشخص کنید این تبدیل جدید onto هست یا خیر.

(ب) (۸ نمره) مشخص کنید این تبدیل جدید یک به یک هست یا خیر.

پرسش‌های عملی (۳۰ نمره)

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۱۰/۸ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۱۰/۱۳ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

پرسش ۱ (۳۰ نمره) در این سوال میخواهیم پل‌های درون یک گراف را پیدا کنیم. پل در گراف یالی است که اگر از گراف حذف شود به تعداد مؤلفه‌های همبندی در گراف افزوده میشود. لازم است این سوال با مفاهیم جبرخطی حل شود. به این معنا که برای حل سوال فقط از ماتریس مجاورت و توان‌های آن میتوانید استفاده کنید.

ورودی

در ابتدا به شما n داده میشود که تعداد رئوس گراف است. در n خط بعدی ماتریس مجاورت گراف به شما داده میشود. که درایه‌های آن در هر خط با فاصله از هم جدا شده‌اند. تضمین میشود گراف داده شده همبند میباشد.

خروجی

در خروجی باید پل‌های گراف برگردانده شود. هرکدام از یال‌ها را با دو راس ابتدا و انتهای آن نشان میدهیم به طوری که عدد راس اول کوچکتر باشد. به طور مثال اگر یالی بین دو راس ۱۰ و ۲۰ قرار داشته باشد به صورت دوتایی (۱۰, ۲۰) نشان میدهیم. یال‌هایی که در خروجی می‌آیند باید ابتدا بر اساس عنصر اول و بعد بر اساس عنصر دوم مرتب شده باشند و در خطوط جداگانه چاپ شوند. اگر گراف پلی نداشت در خروجی none چاپ کنید. همچنین راس‌ها از ۰ تا $n-1$ شماره گذاری شده‌اند.

مثال

در ادامه چند تست کیس نمونه قرار داده شده است.

ورودی نمونه ۱

```
5
0 0 1 0 0
0 0 0 0 1
1 0 0 0 1
0 0 0 0 1
0 1 1 1 0
```

خروجی نمونه ۱

```
0 2
1 4
2 4
3 4
```

ورودی نمونه ۲

```
5
0 1 0 1 1
1 0 0 0 0
0 0 0 1 1
1 0 1 0 0
1 0 1 0 0
```

خروجی نمونه ۲

```
0 1
```