به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۱

تمرین چهارم : ماتریس‌ها

پرسش‌های تئوری (۱۴۰ نمره)

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۸/۱۳ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۸/۳ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

پرسش ۱ (۱۵ نمره) فرض کنید U زیرفضایی در V باشد و داشته باشیم $U \neq V$. تبدیل خطی S از زیرفضای U به زیرفضای V درنظر بگیرید به طوری که وجود داشته باشد $u \in U$ به طوری که $Su \neq ۰$. تبدیل T را به صورت زیر تعریف میکنیم.

$$T(v) = \begin{cases} Sv & \text{if} \quad v \in U \\ ۰ & \text{Otherwise} \end{cases}$$

نشان دهید که تبدیل T خطی نمی‌باشد.

پاسخ بردار های u و v را به این صورت درنظر بگیرید.

$$u \in U \quad \text{and} \quad Su \neq ۰$$
$$v \in V \quad \text{and} \quad v \notin U$$

حال اگر T تبدیل خطی باشد باید داشته باشیم $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$. با توجه به خاصیت زیرفضایی U میدانیم که $\alpha u + \beta v$ در U نمیباشد. (چرا که در اینصورت v عضو U خواهد بود که خلاف فرض است.) بنابراین داریم $T(\alpha u + \beta v) = ۰$.

برای طرف راست تساوی داریم :

$$\alpha T(u) + \beta T(v) = \alpha Su \neq ۰$$

با توجه به این دومعادله داریم $T(\alpha u + \beta v) \neq \alpha T(u) + \beta T(v)$ و در نتیجه تبدیل T خطی نمیباشد.

پرسش ۲ (۱۵ نمره) فرض کنید ماتریس $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ و همچنین $Rank(A) = ۱$ و $Trace(A) = ۰$ نشان دهید که به ازای هر $k > ۱$ داریم $A^k = ۰$.

پاسخ میدانیم که اگر به ازای ماتریس A داشته باشیم $Rank(A) = ۱$ آنگاه میتوانیم ماتریس A را به صورت uv^T بنویسیم به صورتی که بردار های u و v ناصفر هستند.

همینطور میدانیم $Trace(uv^T) = u^T v = ۰$ حال با داشتن این اطلاعات ماتریس $A^۲$ را میسازیم.

$$A^۲ = uv^T uv^T = u(v^T u)v^T = u(۰)v^T = ۰$$

حال اگر داشته باشیم $A^۲ = ۰$ میتوانیم نتیجه بگیریم که به ازای تمام $k > ۱$ داریم $A^k = ۰$.

پرسش ۳ (۲۰ نمره) فرض کنید ماتریس P یک ماتریس جایگشت باشد. در اینصورت :

(آ) (۵ نمره) نشان دهید $PP^T = I$.

(ب) (۵ نمره) نشان دهید که P^T هم یک ماتریس جایگشت است.

(ج) (۱۰ نمره) ثابت کنید وجود دارد k طبیعی به صورتی که $P^k = I$.

پاسخ ماتریس جایگشت رامیتوانیم به این صورت تعریف کنیم. فرض کنید یک جایگشت تصادفی π داشته باشیم که ورودی آن اعداد طبیعی ۱ تا n و همینطور خروجی آن هم همین اعداد میباشد و همینطور ۱ به ۱ باشد. بنابراین ماتریس P را میتوان به صورت زیر تعریف کرد :

$$P = \begin{bmatrix} e_{\pi_۱}^T \\ \vdots \\ e_{\pi_n}^T \end{bmatrix}$$

(آ) با توجه به تعریفی که از P ارائه دادیم میتوانیم PP^T را به این صورت نشان دهیم :

$$PP^T_{ij} = e^T_{\pi_i} e_{\pi_j}$$

که واضح است این مقدار فقط به ازای مقادیر روی قطر مقدار ۱ دارد و بقیه درایه‌ها صفر هستند. پس داریم $PP^T = I$.

(ب) ماتریس P^T برابر است با :

$$P^T = [e_{\pi_1}, \dots e_{\pi_n}]$$

همینطور توجه داشته باشید که هر سطر در این ماتریس دقیقا ۱ مقدار ۱ دارد. بنابراین میتوانیم آنرا به این صورت بنویسیم :

$$P^T = \begin{bmatrix} e^T_{\pi_{a_1}} \\ \vdots \\ e^T_{\pi_{a_n}} \end{bmatrix}$$

که این ماتریس خود یک ماتریس جایگشت میباشد.

(ج) در ابتدا مقادیر p_i را تعریف میکنیم :

$$p_i = min_p \quad \pi^p(i) = i$$

در اینجا منظور از π^p ترکیب توابع است و نه ضرب توابع. دقت کنید که این p حتما وجود دارد. حال یک k که در این سوال میتوانیم معرفی کنیم برابر است با $\Pi_{i=1}^n p_i$ در این صورت برای ماتریس P^k داریم :

$$P = \begin{bmatrix} e^T_{\pi^k_1} \\ \vdots \\ e^T_{\pi^k_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^T_1 \\ \vdots \\ e^T_n \end{bmatrix} = I$$

پرسش ۴ (۳۰ نمره)

(آ) (۷ نمره) A یک ماتریس دلخواه $n \times n$ میباشد و B هم ماتریس $n \times n$ میباشد که همه درایه‌های آن یک است. ثابت کنید :

$$Rank(A) - 1 \leq Rank(A - B)$$

(ب) (۷ نمره) ماتریس‌های A و B ماتریس‌های دلخواه $n \times n$ میباشند. ثابت کنید اگر داشته باشیم $AB = BA$ آنگاه نامساوی زیر برقرار است.

$$Rank(A + B) + Rank(AB) \leq Rank(A) + Rank(B)$$

(ج) (۸ نمره) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ و دلخواه باشد و همچنین داشته باشیم $A^2 = 0$. نشان دهید:

$$Rank(A + A^T) = 2Rank(A)$$

(د) (۸ نمره) نشان دهید اگر $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ و $Q \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ ماتریس‌های مربعی و فول‌رنک باشند و $A_{m\times n}$ ماتریسی دلخواه باشد داریم:

$$Rank(QA) = Rank(A) = Rank(AP)$$

پاسخ

(آ) در ابتدا نامساوی زیر را اثبات میکنیم.
به ازای ماتریس ها دلخواه A و B داریم :

$$Rank(A + B) \leq Rank(A) + Rank(B)$$

r_a و r_b را برابر با رنک دو ماتریس تعریف میکنیم. بنابراین ماتریس A دارای مجموعه پایه‌ای به صورت $\{a_1, \dots a_{r_a}\}$ میباشد و همینطور برای ماتریس B این مجموعه به صورت $\{b_1, \dots b_{r_b}\}$ میباشد.
حال مجموعه $\{a_1, \dots a_{r_a}, b_1, \dots b_{r_b}\}$ را در نظر بگیرید. دقت کنید فضای span شده توسط این بردار ها حداکثر رنک $r_a + r_b$ را دارد که این درصورتی است که مجموعه جدید ساخته شده مستقل خطی باشد.
حال دقت کنید که هر برداری که در فضای ستونی $A + B$ قرار دارد را میتوان با این مجموعه ساخت چرا که مجموعه جدید هم شامل فضای ستونی A و هم شامل فضای ستونی B میباشد. بنابراین داریم :

$$ColSapce(A + B) \subseteq Span\{a_1, \dots a_{r_a}, b_1, \dots b_{r_b}\}$$

$$Rank(A + B) \leq Dim(Span\{a_1, \dots a_{r_a}, b_1, \dots b_{r_b}\}) \leq r_a + r_b$$

حال دقت کنید که ماتریس B درون صورت سوال رنک ۱ دارد. با جایگذاری زیر میتوانیم به رابطه خواسته شده برسیم :

$$A := A - B$$

$$Rank(A) \leq Rank(A-B) + Rank(B)$$

و در نتیجه :

$$Rank(A) - 1 \leq Rank(A-B)$$

(ب) نمادگذاری زیر را درنظر بگیرید.

$$W_1 = \text{Nullspace(A)} \text{ زیرفضای}$$

$$W_2 = \text{Nullspace(B)} \text{ زیرفضای}$$

از قبل میدانیم که اگر W_1 و W_2 زیرفضاهایی در V باشند:

$$Dim(W_1 + W_2) = Dim(W_1) + Dim(W_2) - Dim(W_1 \cap W_2) \quad ، \quad W_1 + W_2 = \{u + v | u \in W_1, v \in W_2\}$$

لازم است ثابت کنیم:

$$Nullity(A+B) + Nullity(AB) \geq Nullity(A) + Nullity(B) = Dim(W_1) + Dim(W_2) = Dim(W_1+W_2) + Dim(W_1 \cap W_2)$$

$$x \in (W_1 + W_2) \rightarrow ABx = AB(u+v) | u \in Ker(A) \quad ، \quad v \in Ker(B) \rightarrow AB(u+v) = ABu = BAu = 0$$

از معادلات بالا میتوان نتیجه گرفت که:

$$Dim(W_1 + W_2) \leq Nullity(AB)$$

$$x \in W_1 \cap W_2 \rightarrow Ax = 0 \quad \text{and} \quad Bx = 0 \rightarrow (A+B)x = 0$$

از معادلات بالا میتوان نتیجه گرفت که:

$$Dim(W_1 \cap W_2) \leq Nullity(A+B)$$

از دو نامساوی بدست آمده میتواینم حکم را نتیجه بگیریم.

(ج) در ابتدا حکم را کمی ساده‌تر میکنیم.

$$(A^T x)^T (Ax) = x^T AAx = x^T A^2 x = 0$$

بنابراین بردارهای Ax و $A^T x$ بر هم عمود میباشند. از نتایج جالب این امر این است که فضاهای $Nullspace(A + A^T)$ و $Nullspace(A) \cap Nullspace(A^T)$ برابر میباشند. چرا که از برقراری هر سمت میتوان دیگری را نتیجه گرفت.

$$Rank(A + A^T) = 2Rank(A) \rightarrow Nullity(A + A^T) = 2Nullity(A) - n$$

$$\rightarrow Dim(Nullspace(A) \cap Nullspace(A^T)) = 2Nullity(A) - n$$

$$\rightarrow Nullity(A) + Nullity(A^T) - Dim(Nullspace(A) + Nullspace(A^T)) = 2Nullity(A) - n$$

$$\rightarrow Dim(Nullspace(A) + Nullspace(A^T)) = n$$

بنابراین برای اثبات حکم کافی است که نشان دهیم $Dim(Nullspace(A) + Nullspace(A^T)) = n$. برای اینکار ابتدا درنظر داشته باشید که $Colspace(A)^\perp = Nullspace(A^T)$. به این معنا که هر عضو در یکی از آنها به تمام عضو های دیگری عمود است و همچنین هر بردار در فضای $\mathbb{R}^n$ را میتوان به صورت جمعی از این دو نوشت.

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow x = u + v \quad | \quad u \in Nullspace(A^T) \quad \text{and} \quad v \in Colspace(A)$$

حال عضوی درون $Colspace(A)$ را درنظر بگیرید.

$$x \in Colspace(A) \rightarrow \exists_z Az = x \rightarrow A^2 z = Ax = 0 \rightarrow x \in Nullspace(A)$$

پس هر عضو درون $\mathbb{R}^n$ را میتوان به صورت جمعی از عضو های درون $Nullspace(A)$ و $Nullspace(A^T)$ نوشت. بنابراین ثابت میشود که $Dim(Nullspace(A) + Nullspace(A^T)) = n$ و حکم ثابت میشود.

(د) در ابتدا ثابت میکنیم که $Rank(QA) = Rank(A)$. برای اینکار کافی است ثابت کنیم $Nullity(QA) = Nullity(A)$ و بعد با استفاده از rank-nullity حکم خواسته شده اثبات میشود.

این نکته را در نظر داشته باشید که Q فول رنک میباشد بنابراین اگر به ازای x دلخواه داشته باشیم $Qx = ۰$ آنگاه میتوان نتیجه گرفت که $x = ۰$.

فرض کنید $x \in NullSpace(A)$ آنگاه داریم $QAx = Q(Ax) = Q(۰) = ۰$ پس داریم :

$$NullSpace(A) \subseteq NullSpace(QA)$$

حال بار دیگر فرض کنید $QAx = ۰$ با توجه به چیزی که پیشتر گفتیم میتوان نتیجه گرفت که $Ax = ۰$ پس :

$$NullSpace(QA) \subseteq NullSpace(A)$$

از دو رابطه زیرمجموعه‌ای به دست آمده میتوانیم نتیجه بگیریم که $Nullity(QA) = Nullity(A)$.

با توجه به اینکه اگر P فول‌رنک باشد آنگاه P^T هم فول‌رنک است، قسمت دیگر صورت سوال به راحتی نتیجه میشود.

$$Rank(AP) = Rank(P^T A^T) = Rank(A^T) = Rank(A)$$

پرسش ۵ (۳۵ نمره) فرض کنید A ماتریس $m \times n$ باشد و $m \geq n$، موراد زیر را اثبات کنید :

(آ) (۱۰ نمره) نشان دهید که ماتریس B و C وجود دارند که در معادله زیر صدق میکنند.

$$\begin{bmatrix} I_m & ۰ \\ -A^T & I_n \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} I_m & -A \\ ۰ & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & ۰ \\ ۰ & I_n - A^T A \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & ۰ \\ -A & I_m \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} I_n & -A^T \\ ۰ & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & ۰ \\ ۰ & I_m - AA^T \end{bmatrix}$$

که I_k ماتریسی همانی با k سطر و ستون میباشد.

(ب) (۱۵ نمره) نشان دهید $Rank(I_m - AA^T) - Rank(I_n - A^T A) = m - n$.

پاسخ

(آ) ماتریس‌های B و C را به این صورت در نظر بگیرید :

$$B = \begin{bmatrix} I_m & A \\ A^T & I_n \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} I_n & A^T \\ A & I_m \end{bmatrix}$$

با قرار دادن ماتریس B و C در معادلات خواسته شده مشاهده میکنیم که برقرار میباشند.

(ب) با توجه به اینکه ماتریس‌های ضرب شده در سمت چپ و سمت راست ماتریس‌های B و C فول‌رنک هستند، میتوانیم نشان دهیم که:

$$Rank(\begin{bmatrix} I_m & A \\ A^T & I_n \end{bmatrix}) = m + Rank(I_n - A^T A)$$

$$Rank(\begin{bmatrix} I_n & A^T \\ A & I_m \end{bmatrix}) = n + Rank(I_m - AA^T)$$

و دقت کنید که $Rank(\begin{bmatrix} I_m & A \\ A^T & I_n \end{bmatrix}) = Rank(\begin{bmatrix} I_n & A^T \\ A & I_m \end{bmatrix})$ چرا که فقط جابه‌جایی های سطری و ستونی روی آن انجام شده است و رنک آن را تغییر نمیدهد. بنابراین داریم :

$$m + Rank(I_n - A^T A) = n + Rank(I_m - AA^T) \rightarrow Rank(I_m - AA^T) - Rank(I_n - A^T A) = m - n$$

پرسش ۶ (۲۵ نمره) تبدیل خطی $T_۱ : \mathbb{R}^۳ \rightarrow \mathbb{R}^۲$ را به صورت زیر تعریف میکنیم.

$$T_۱(x) = \begin{bmatrix} e_۱^T x \\ (e_۲ + e_۳)^T x \end{bmatrix}$$

همچنین تبدیل $T_۲ : \mathbb{R}^۲ \rightarrow \mathbb{R}^۲$ را دوران به اندازه ۹۰ درجه تعریف میکنیم.

$$T_۲(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -x_۲ \\ x_۱ \end{bmatrix}$$

همچنین $T_۲ \circ T_۱ \ : \ \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۲$ را به صورت ترکیب $T_۱$ و بعد $T_۲$ تعریف میکنیم.

$$(T_۲ \circ T_۱)(x) = T_۲(T_۱(x))$$

(آ) (۱۲ نمره) مشخص کنید این تبدیل جدید onto هست یا خیر.

(ب) (۱۳ نمره) مشخص کنید این تبدیل جدید یک به یک هست یا خیر.

پاسخ

(آ) به ازای هر عضو درون $\mathbb{R}^۲$ مانند $x = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$ عضوی مانند y در $\mathbb{R}^۳$ وجود دارد که تصویر y تحت تبدیل جدید برابر با x است. چرا که کافی است قرار دهیم:

$$y = \begin{bmatrix} x_۲ \\ ۰ \\ -x_۱ \end{bmatrix}$$

$$T_۲(T_۱(y)) = T_۲(\begin{bmatrix} x_۲ \\ -x_۱ \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$$

پس این تبدیل onto است.

(ب) واضح است که این تبدیل جدید یک‌به‌یک نمیباشد. به طور مثال تصویر دو بردار زیر یکسان میباشد.

$$y_۱ = \begin{bmatrix} x_۱ \\ ۰ \\ x_۲ \end{bmatrix} \quad ، \quad y_۲ = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$(T_۲ \circ T_۱)(y_۱) = T_۲(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -x_۲ \\ x_۱ \end{bmatrix}$$

$$(T_۲ \circ T_۱)(y_۲) = T_۲(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -x_۲ \\ x_۱ \end{bmatrix}$$

همینطور به طور کلی توجه داشته باشید که تبدیلی به فرم $f \ : \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ به طوری که $m > n$ هیچگاه نمیتواند یک به یک باشد چرا که در این صورت میتوان نتیجه گرفت که $n \geq m$ و این خلاف فرض اولیه میباشد.

پرسش‌های عملی (۳۰ نمره)

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۸/۱۳ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۸/۳ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

پرسش ۱ (۳۰ نمره) در این سوال میخواهیم پل های درون یک گراف را پیدا کنیم. پل در گراف یالی است که اگر از گراف حذف شود به تعداد مؤلفه‌های همبندی در گراف افزوده میشود. لازم است این سوال با مفاهیم جبرخطی حل شود. به این معنا که برای حل سوال فقط از ماتریس مجاورت و توان‌های آن میتوانید استفاده کنید.

ورودی

در ابتدا به شما n داده میشود که تعداد رئوس گراف است. در n خط بعدی ماتریس مجاورت گراف به شما داده میشود. که درایه های آن در هرخط با فاصله از هم جدا شده اند. تضمین میشود گراف داده شده همبند میباشد.

خروجی

در خروجی باید پل های گراف برگردانده شود. هرکدام از یال هارا با دو راس ابتدا و انتهای آن نشان میدهیم به طوری که عدد راس اول کوچکتر باشد. به طور مثال اگر یالی بین دو راس ۱۰ و ۲۰ قرار داشته باشد به صورت دوتایی (۱۰, ۲۰) نشانش میدهیم. یال هایی که در خروجی می‌آیند باید ابتدا بر اساس عنصر اول و بعد بر اساس عنصر دوم مرتب شده باشند و در خطوط جداگانه چاپ شوند. اگر گراف پلی نداشت در خروجی none چاپ کنید. همچنین راس ها از ۰ تا $n - ۱$ شماره گذاری شده‌اند.

مثال

در ادامه چند تست کیس نمونه قرار داده شده است.

ورودی نمونه ۱ :

```
5
0 0 1 0 0
0 0 0 0 1
1 0 0 0 1
0 0 0 0 1
0 1 1 1 0
```

خروجی نمونه ۱ :

```
0 2
1 4
2 4
3 4
```

ورودی نمونه ۲ :

```
5
0 1 0 1 1
1 0 0 0 0
0 0 0 1 1
1 0 1 0 0
1 0 1 0 0
```

خروجی نمونه ۲ :

```
0 1
```

پاسخ برای حل این سوال، در ابتدا هر یک از یال های درون گراف را حذف میکنیم، با توجه به اینکه گراف اولیه همبند میباشد، اگر گراف ناهمبند شده باشد میتوانیم بگوییم که این یال یک پل بوده است.

حال برای چک کردن همبندی یک ماتریس مجاورت از روش زیر استفاده میکنیم :

دو سر یالی که از گراف برداشته شده است را i و j مینامیم. اگر در توان‌های ماتریس مجاورت (از ۲ تا $n - ۱$) این دو راس در هیچ ماتریسی به هم مسیر نداشتند، آنگاه گراف دیگر همبند نیست. با استفاده از این روش میتوانیم تمام پل هارا پیدا کنیم.

کد زیر یک پیاده‌سازی از الگوریتم گفته شده است.

```python
import numpy as np

def calc(matrix, n):
    mul = np.matmul(matrix, matrix)
    sum_of_paths = mul.copy()
    for _ in range(n-2):
        mul = np.matmul(mul, matrix)
        sum_of_paths += mul
    return sum_of_paths


n = int(input())

matrix=n*[0]
for i in range(n):
    matrix[i] = list(map(float, input().split()))

matrix  = np.array(matrix)

is_none = True

for i in range(n):
    for j in range(i+1, n):
        if(matrix[i][j] == 1):
            new_matrix = matrix.copy()
            new_matrix[i][j] = 0
            new_matrix[j][i] = 0
            sum = calc(new_matrix, n)
            if(sum[i][j] == 0):
                print(i, j)
                is_none = False

if is_none:
    print("none")
```