



جبر خطی

حمیدرضا ربیعی، مریم رضانی
بهار ۱۴۰۱

تمرین پنجم: مقادیرهای ویژه و بردارهای ویژه

پرسش‌های تئوری (۱۴۰ نمره)

مهلت ارسال: ۱۴۰۱/۱۰/۳۰ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹، با تاخیر: ۱۴۰۱/۱۱/۵ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

پرسش ۱ (۳۵ نمره) فرض کنید ماتریس A به صورت مقابل است: $A \in R^{n \times m}$. این ماتریس ناصفر بوده و رنک آن r می‌باشد. اکنون نشان دهید که همه روابط زیر از خاصیت تجزیه SVD ماتریس A و یا ترانزاده آن پیروی می‌کنند. $(A = U\Sigma V^T)$

$$Av_i = \begin{cases} \sigma_i u_i & i = 1, 2, \dots, r \\ 0 & i = r+1, r+2, \dots, m \end{cases}$$

$$A^T u_i = \begin{cases} \sigma_i v_i & i = 1, 2, \dots, r \\ 0 & i = r+1, r+2, \dots, n \end{cases}$$

توجه شود که u_1, u_2, \dots, u_m و v_1, v_2, \dots, v_n به ترتیب ستون‌های U و V هستند.

پرسش ۲ (۳۵ نمره) فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد. همچنین فرض کنید که S و T دو تبدیل باشند به طوری که $T, S \in \mathcal{L}(V)$ به این معنا که T و S تبدیل‌هایی خطی از فضای V به خودش هستند). ثابت کنید که ماتریس‌های ST و TS دارای مقادیر ویژه یکسانی هستند.

پرسش ۳ (۳۵ نمره) ماتریس مثبت معین $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

(آ) تجزیه‌ی cholecky ماتریس A را بیابید.

(ب) به کمک نتیجه‌ی قسمت قبل، پاسخ معادله‌ی $Ax = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 17 \end{bmatrix}$ را بیابید.

پرسش ۴ (۳۵ نمره) فرض کنید v یک بردار غیر صفر در R^n باشد که $v^T v \neq 0$. α را قرار دهید: $\alpha = \frac{1}{v^T v}$. اکنون ماتریس $n \times n$ به نام A را تعریف کنید: $A = I - \alpha v v^T$. (ماتریس I ماتریس همانی $n \times n$ است). ثابت کنید: $A^{-1} = A$.