به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۱

تمرین پنجم: کاهش بعد و نرم

پرسش ۱ فرض کنید ماتریس A به صورت مقابل است: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$
این ماتریس ناصفر بوده و رنک آن r می‌باشد. اکنون نشان دهید که همه روابط زیر از خاصیت تجزیه SVD ماتریس A و یا ترانهاده آن پیروی می‌کنند. $(A = U\Sigma V^T)$

$$Av_i = \begin{cases} \sigma_i u_i & i = 1, 2, ..., r \\ 0 & i = r+1, r+2, ..., m \end{cases}$$

$$A^T u_i = \begin{cases} \sigma_i v_i & i = 1, 2, ..., r \\ 0 & i = r+1, r+2, ..., n \end{cases}$$

توجه شود که $v_1, v_2, ..., v_m$ و $u_1, u_2, ..., u_n$ به ترتیب ستون‌های U و V هستند.

پاسخ سوال ۱ . با تجزیه $A = U\Sigma V^T$ شروع می‌کنیم و می‌دانیم که V یک ماتریس orthogonal می‌باشد یعنی: $VV^T = I$ پس به عبارت دیگر داریم

$$AV = U\Sigma$$

حال با استفاده از این حقیقت که $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r, 0, ...0) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ و $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r \geq 0$. حال ماتریس U را به صورت نمایش ستون‌های آن تشکیل می‌دهیم

$$U = [u_1|u_2|...|u_n]$$

سپس

$$U\Sigma = [u_1|u_2|...|u_n]\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= [\sigma_1 u_1|\sigma_2 u_2|...|\sigma_r u_r|0|...|0]$$

حال طرف چپ را باز نویسی می‌کنیم برحسب ستون‌های V و نتیجه به صورت زیر خواهد بود

$$AV = [Av_1|Av_2|\dots|Av_m]$$

در نتیجه با مقایسه دقیق طرف چپ و راست عبارت بیان شده، بررسی می‌کنم برابر هستند یا خیر. ابتدا در نظر داریم فرض سوال را:

$$\begin{cases} \sigma_i u_i & i = 1, 2, ..., r \\ 0 & i = r+1, r+2, ..., m \end{cases}$$

حال در می‌یابیم که عبارات داده شده در طرف چپ و راست برابراند.
حال رابطه $A = U\Sigma V^T$ را در نظر بگیرید و آن را transpose کنید.

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T = (V^T)^T\Sigma^T U^T = V\Sigma^T U^T$$

از طرفی نیز به این نکته توجه داریم که مجدد به این دلیل که U ماتریسی orthogonal است داریم $U^TU = I$ پس داریم

$$A^TU = V\Sigma^T.$$

مشابه آنچه در قسمت قبل عمل کردیم طرف چپ و راست را محاسبه و برابر قرار می‌دهیم.

$$A^TU = [A^Tu_۱|A^Tu_۲|\dots|A^Tu_n] = [\sigma_۱v_۱|\sigma_۲v_۲|\dots|\sigma_rv_r|۰|\dots|۰] = V\Sigma^T.$$

که با در نظر گرفتن فض سوال یعنی

$$A^Tu_i = \begin{cases} \sigma_i v_i & i = ۱, ۲, ..., r \\ ۰ & i = r+۱, r+۲, ..., n \end{cases}$$

آنچه که مطلوب بوده را اثبات کردیم.

پرسش ۲ فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد. همچنین فرض کنید که S و T دو تبدیل باشند به طوری که $T, S \in \mathcal{L}(V)$ (به این معنا که T و S تبدیل‌هایی خطی از فضای V به خودش هستند). ثابت کنید که ماتریس‌های TS و ST دارای مقادیر ویژه یکسانی هستند.

پاسخ سوال ۲. برای اثبات این حکم، لازم است نشان دهیم هر عددی که در مجموعه مفادیر وِیژه ماتریس ST باشد، در مجموعه مقادیر ویژه TS نیز موجود است و بالعکس. یک طرف رابطه گفته شده را اثبات می‌کنیم و طرف دیگر به طور مشابهی قابل نتیجه‌گیری است.
فرض کنیم λ یکی از مقادیر ویژه ST باشد. همچنین فرض می‌کنیم بردار ویژه متناظر با این مقدار ویژه v باشد، به طوری که $STv = \lambda v$.
حال فرض می کنیم که $Tv \neq ۰$. بنابرین داریم:

$$TS(Tv) = T(STv) = T(\lambda v) = \lambda Tv$$

در این صورت λ یک مقدار ویژه برای ماتریس TS با بردار وِیژه متناظر Tv است.
حال حالتی را در نظر می‌گیریم که

$$Tv = ۰ \quad (i)$$

،
در این صورت با توجه به اینکه v بردار ویژه ماتریس ST است و طبق تعریف نمی‌تواند بردار صفر باشد، و همچنین $STv = \lambda v$، نتیجه می‌شود که $\lambda = ۰$.
از طرفی طبق (i) و ناصفر بودن v می‌دانیم که T معکوس‌پذیر نیست. در نتیجه TS نیز معکوس‌پذیر نیست. در نتیجه، برداری ناصفر مانند $w \in V$ یافت می‌شود، به طوری که $TSw = ۰$. در نتیجه $\lambda = ۰$ یک مقدار ویژه برای ماتریس TS نیز است.
بنابرین در هر حالتی، λ (هر مقدار ویژه دلخواهی از ST) جزو مقادیر ویژه TS نیز است.

پرسش ۳ ماتریس مثبت معین $A = \begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

(آ) تجزیه‌ی cholesky ماتریس A را بیابید.

(ب) به کمک نتیجه‌ی قسمت قبل، پاسخ معادله‌ی $Ax = \begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۱۲ \\ ۱۷ \end{bmatrix}$ را بیابید.

پاسخ ۳ (آ) تجزیه‌ی cholesky به صورت زیر خواهد بود.

$$A = \begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{۱۱} & ۰ & ۰ \\ R_{۱۲} & R_{۲۲} & ۰ \\ R_{۱۳} & R_{۲۳} & R_{۳۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{۱۱} & R_{۱۲} & R_{۱۳} \\ ۰ & R_{۲۲} & R_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & R_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$R_{۱۱} = \sqrt{A_{۱۱}} = \sqrt{۹} = ۳, \quad R_{۱,۲:۳} = \frac{۱}{R_{۱۱}} A_{۱,۲:۳} \Rightarrow \begin{bmatrix} R_{۱۲} & R_{۱۳} \end{bmatrix} = \frac{۱}{R_{۱۱}} \begin{bmatrix} ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & R_{۲۲} & ۰ \\ ۱ & R_{۲۳} & R_{۳۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۰ & R_{۲۲} & R_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & R_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$A_{۲:۳,۲:۳} - R^T_{۱,۲:۳} R_{۱,۲:۳} = R^T_{۲:۳,۲:۳} R_{۲:۳,۲:۳} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۴ & ۴ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{۲۲} & ۰ \\ R_{۲۳} & R_{۳۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{۲۲} & R_{۲۳} \\ ۰ & R_{۳۳} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{۲۲} & ۰ \\ R_{۲۳} & R_{۳۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{۲۲} & R_{۲۳} \\ ۰ & R_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$R_{۲۲} = \sqrt{۴} = ۲, \quad R_{۲,۳} = \frac{۱}{۲} \times ۴ = ۲ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۲ & R_{۳۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & R_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$R_{۳۳}^{۲} = ۵ - ۲ \times ۲ = ۱ \Rightarrow R_{۳۳} = ۱$

$$A = \begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

(ب) حالا از این تجزیه برای حل کردن دستگاه داده شده استفاده می‌کنیم.

$Ax = b \Rightarrow R^T R x = b$

$y := Rx \Rightarrow R^T y = b$

$$R^T y = b \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۱۲ \\ ۱۷ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = ۴ \\ y_۲ = ۶ \\ ۴ + ۲ \times ۶ + y_۳ = ۱۷ \Rightarrow y_۳ = ۱ \end{cases}$$

$$Rx = y \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_۳ = ۱ \\ ۲ \times x_۲ + ۲ \times ۱ = ۶ \Rightarrow x_۲ = ۲ \\ ۳ \times x_۱ + ۱ = ۴ \Rightarrow x_۱ = ۱ \end{cases} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

پرسش ۴ فرض کنید v یک بردار غیر صفر در $\mathbb{R}^n$ باشد که $v^T v \neq ۰$. α را قرار دهید: $\alpha = \frac{۲}{v^T v}$. اکنون ماتریس $n \times n$ به‌نام A را تعریف کنید: $A = I - \alpha v v^T$. (ماتریس I ماتریس همانی $n \times n$ است.) **ثابت کنید:** $A^{-۱} = A$.

پاسخ ۴ ابتدا نشان می‌دهیم که ماتریس A یک ماتریس متقارن است:

$$A^T = (I - \alpha v v^T)^T = I^T - (\alpha v v^T)^T = I - \alpha (v^T)^T v^T$$

$$= I - \alpha v v^T = A \Rightarrow \boxed{A^T = A}$$

از آن‌جایی که $A^T = A$، پس A ماتریس متقارن است. اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم: $AA = I$

$$AA = (I - \alpha v v^T)(I - \alpha v v^T) = I(I - \alpha v v^T) - \alpha v v^T (I - \alpha v v^T) = I - \alpha v v^T - \alpha v v^T + \alpha^۲ v v^T v v^T \qquad (۱)$$

دقت کنید که:

$$v v^T v v^T = v(v^T v) v^T = v(\frac{۲}{\alpha}) v^T = \frac{۲}{\alpha} v v^T$$

$$\xrightarrow{(۱)} AA = I - ۲\alpha v v^T + \alpha^۲ \frac{۲}{\alpha} v v^T = I$$

$$\Rightarrow AA = I \Rightarrow \boxed{A^{-۱} = A}$$

بنابراین حکم ثابت می‌شود.