به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۲

استقلال، ضرب داخلی و نرم | **تمرین دوم** | تاریخ انتشار: ۱۶ اسفند ۱۴۰۱

۱. پرسش‌های خود در مورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر پاسخ:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید تا سقف ۱۵ روز تمارین خود را با تاخیر ارسال کنید. پس از آن به ازای هر ساعت تاخیر ۵.۰ درصد نمره کسر خواهد شد. مقیاس محاسبه تاخیر ساعت است و تاخیر شما رو به بالا گرد خواهد شد تا به مقیاس ساعت درآید. به عنوان مثال ۲ ساعت و ۱۰ دقیقه تاخیر معادل ۳ ساعت در نظر گرفته خواهد شد. تمارین تئوری و عملی در محاسبه تاخیرها دو تمرین جداگانه در نظر گرفته خواهند شد. یعنی ۲ روز تاخیر بر تمرین تئوری و ۱ روز تاخیر بر تمرین عملی در مجموع برابر ۳ روز در نظر گرفته خواهد شد. در نهایت اگر بیش از ۱۵ روز تاخیر داشته باشید، تاخیر مجاز شما به نحو بهینه‌ای توزیع خواهد شد که کمترین میزان نمره را از دست بدهید.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا بدست آوردن ایده کلی با یک دیگر مشارکت و هم‌فکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه درس می‌باشد چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما بدست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما منحصرا توسط خود دانشجو انجام شود. بیشینه اندازه مجاز گروهی که در آن می‌توانید برای حل تمرین هم‌فکری کنید برابر ۴ نفر است. رعایت آداب‌نامه‌ی انجام تمرین‌های درسی الزامی است. در صورت مشاهده تخلف مطابق قوانین دانشکده و دانشگاه برخورد خواهد شد.

سوالات تئوری (۱۴۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۵ فروردین ۱۴۰۱

پرسش ۱ (۱۰ نمره) فرض کنید $v_1, v_2, ..., v_n$ در فضای برداری V مستقل خطی هستند.
اثبات کنید $v_1 - v_2, v_2 - v_3, ...v_{n-1} - v_n, v_n$ نیز مستقل خطی هستند

پرسش ۲ (۱۰ نمره) اثبات یا رد کنید: اگر $v_1, v_2, ...v_m$ و $w_1, w_2, ..., w_m$ در فضای برداری V مستقل خطی باشند(هر مجموعه بردار v_i و w_i به صورت جداگانه مستقل خطی است) در نتیجه $v_1 + w_1, v_2 + w_2, ...v_m + w_m$ نیز مستقل خطی است

پرسش ۳ (۲۰ نمره) اگر $v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ ، $v_2 = \begin{bmatrix}1\\a\\5\end{bmatrix}$ و $v_3 = \begin{bmatrix}0\\4\\b\end{bmatrix}$، سه بردار در R^3 باشند، مقادیر a و b را به گونه‌ای بیابید که این سه بردار، وابسته خطی باشند.

پرسش ۴ (۲۰ نمره) می‌دانیم که نرم p یک بردار x به صورت روبرو تعریف می‌شود: $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$

(آ) (۱۰ نمره) اثبات کنید به ازای هر p و q به شرطی که داشته باشیم $0 < p < q$ عبارت زیر درست است:

$$\|x\|_p \geq \|x\|_q$$

(ب) (۱۰ نمره) اثبات کنید به ازای هر p و q به شرطی که داشته باشیم $0 < p < q$ عبارت زیر درست است:

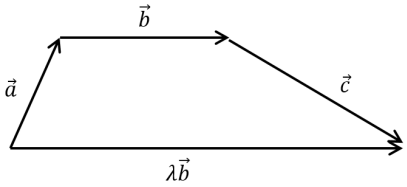
$$\|x\|_p \leq n^{1/p-1/q}\|x\|_q$$

(راهنمایی: دو مقدار حقیقی p و q را مقادیری حقیقی در بازه $[1, \infty]$ در نظر بگیرید که رابطه $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ بینشان برقرار است. آنگاه برای دو بردار متناهی $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ و $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ داریم که $\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$

پرسش ۵ (۲۰ نمره) سه بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را درنظر بگیرید که رابطه $\lambda\vec{b} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ برایشان صادق است. و بردار های $\vec{a}$ و $\vec{c}$ به طور کلی با $\vec{b}$ هم‌جهت اند (به این معنی که حاصل ضرب داخلی‌شان مثبت است). حال برای این بردار ها ثابت کنید که:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{b} + \vec{c}\|^2 \iff \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{c}\|^2$$

(راهنمایی: حل این سوال بدون شهود اولیه مشکل است. توصیه میشود که برای حل راحت تر به این سه بردار و رابطه بینشان به عنوان مدل جبری خوبی برای توصیف یک ذوزنقه دلخواه نگاه کنید همان طور که درشکل برایتان آورده شده. از دید هندسی‌تان و تجزیه $\vec{a}$ و $\vec{c}$ به مولفه های عمود و همراستای $\vec{b}$ در این اثبات کمک بگیرید)



پرسش ۶ (۳۰ نمره)

آ)(۱۰ نمره) $C[-\pi,\pi]$ را فضای برداری تمام توابع پیوسته حقیقی با دامنهٔ $[-\pi,\pi]$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید این فضا مجهز به ضرب داخلی زیر باشد:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

حال فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت دلخواه است. نشان دهید توابع زیر یک مجموعه از بردارهای یکه‌ـ متعامد در $C[-\pi,\pi]$ می‌سازند:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos ۲x}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin ۲x}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

با توجه به بخش قبلی سوال، میتوانیم برای توابع متناوب با دامنه تناوب T ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\langle f(t),g(t)\rangle = \int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(t)g(t)\,dt$$

همچنین همانند قسمت قبل می‌توان اثبات کرد که توابع زیر، یک مجموعه نامتناهی از بردارهای متعامد می‌سازند.

$$۱, \sin \omega_۰ t, \sin ۲\omega_۰ t, \cdots, \sin n\omega_۰ t, \cdots, \cos \omega_۰ t, \cos ۲\omega_۰ t, \cdots, \cos n\omega_۰ t, \cdots$$

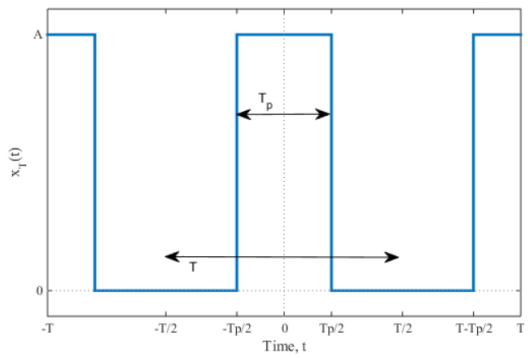
در نتیجه هر تابعی مانند $f(t)$ را می‌توان بر حسب پایه‌های بدست آمده به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos n\omega_۰ t + b_n \sin n\omega_۰ t)$$

حال با استفاده از اطلاعات داده شده، توابع داده شده در قسمت‌های زیر را بر حسب پایه‌های داخل سوال بدست آورید.(راهنمایی: اگر یک تابع دامنه تناوب آن T باشد، مقدار $\omega_۰$ از رابطه $\omega_۰ = \frac{۲\pi}{T}$ بدست می‌آید.

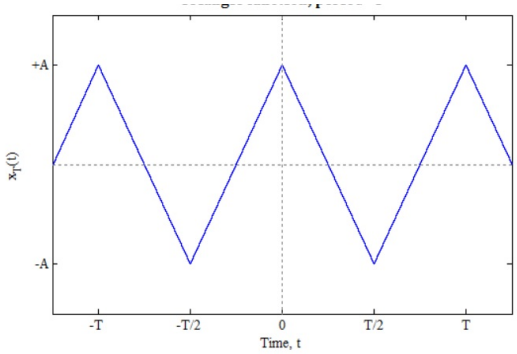
ب) (۱۰ نمره) موج مربعی: (در ادامه رفتار تابع در یک نوسان($|t| < \frac{T}{۲}$) توضیح داده شده است)

$$x_T(t) = \begin{cases} A & |t| < \frac{T_p}{۲} \\ ۰ & |t| > \frac{T_p}{۲} \end{cases}$$



ج) (۱۰ نمره) موج مثلثی: (در ادامه رفتار تابع در یک نوسان($|t| < \frac{T}{۲}$) توضیح داده شده است)

$$x_T(t) = \begin{cases} A + \frac{۴A}{T}t & t < ۰ \\ A - \frac{۴A}{T}t & t > ۰ \end{cases}$$



سوالات عملی (۳۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۷ فروردین ۱۴۰۱

پرسش ۱ (۳۰ نمره) فضای برداری $\mathbb{Z}_2^n$ را در نظر بگیرید. هر بردار از این فضا متناظر یک رشته باینری به طول n است. عملیات جمع دو بردار در این فضا هم معادل عملیات xor دو رشته باینری است. همچنین یک ترکیب خطی از تعدادی از اعضای این فضا، متناظر xor یک زیرمجموعه از آن بردارها است.

بردارهای $v_1, v_2, \ldots, v_m$ داده شده‌است.

به ازای هر $1 \leq k \leq m$ بررسی کنید آیا $v_k \in span(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ یا خیر.

ورودی

در خط اول ورودی دو عدد n و m که با یک فاصله از هم جدا شده‌اند آمده است. در هر کدام از m سطر بعدی یک رشته باینری به طول n بدون فاصله آمده است.

$$1 \leq n, m \leq 500$$

خروجی

در خروجی m خط چاپ کنید که هر کدام در صورت برقرار بودن شرط گفته شده 'YES' و در غیر اینصورت 'NO' باشد.

ورودی نمونه ۱

```
3 7
000
001
011
010
010
110
111
```

خروجی نمونه ۱

```
YES
NO
NO
YES
YES
NO
YES
```

ورودی نمونه ۲

```
3 7
111
111
111
010
111
101
001
```

خروجی نمونه ۲

```
NO
YES
YES
NO
```

```
YES
YES
NO
```

ورودی نمونه ۳

```
5 10
00000
00000
01110
00110
00000
10100
01010
10100
00000
11111
```

خروجی نمونه ۳

```
YES
YES
NO
NO
YES
NO
NO
YES
YES
NO
```