به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۲

استقلال، ضرب داخلی و نرم | **تمرین دوم** | تاریخ انتشار: ۱۶ اسفند ۱۴۰۱

---

۱. پرسش‌های خود در مورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر پاسخ:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید تا سقف ۱۵ روز تمارین خود را با تاخیر ارسال کنید. پس از آن به ازای هر ساعت تاخیر ۰.۵ درصد نمره کسر خواهد شد. مقیاس محاسبه تاخیر ساعت است و تاخیر شما رو به بالا گرد خواهد شد تا به مقیاس ساعت درآید. به عنوان مثال ۲ ساعت و ۱۰ دقیقه تاخیر معادل ۳ ساعت در نظر گرفته خواهد شد. تمارین تئوری و عملی در محاسبه تاخیرها دو تمرین جداگانه در نظر گرفته خواهند شد. یعنی ۲ روز تاخیر بر تمرین تئوری و ۱ روز تاخیر بر تمرین عملی در مجموع برابر ۳ روز در نظر گرفته خواهد شد. در نهایت اگر بیش از ۱۵ روز تاخیر داشته باشید، تاخیر مجاز شما به نحو بهینه‌ای توزیع خواهد شد که کمترین میزان نمره را از دست بدهید.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا بدست آوردن ایده کلی با یک دیگر مشارکت و هم‌فکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه درس می‌باشد چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما بدست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما منحصرا توسط خود دانشجو انجام شود. بیشینه اندازه مجاز گروهی که در آن می‌توانید برای حل تمرین هم‌فکری کنید برابر ۴ نفر است. رعایت آداب‌نامه‌ی انجام تمرین‌های درسی الزامی است. در صورت مشاهده تخلف مطابق قوانین دانشکده و دانشگاه برخورد خواهد شد.

سوالات تئوری (۱۴۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۵ فروردین ۱۴۰۱

پرسش ۱ (۱۰ نمره) فرض کنید $v_1, v_2, ..., v_n$ در فضای برداری V مستقل خطی هستند.

اثبات کنید $v_1 - v_2, v_2 - v_3, ...v_{n-1} - v_n, v_n$ نیز مستقل خطی هستند

پاسخ

$$\sum \alpha_i v_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$$

$$\sum \beta_i (v_i - v_{i+1}) + \beta_n v_n = 0$$

می توانیم هر بتا را برحسب ترکیب خطی از آلفا ها بنویسیم و چون آلفا ها ۰ هستند در نتیجه بتاها نیز ۰ می شوند.

پرسش ۲ (۱۰ نمره) اثبات یا رد کنید: اگر $v_1, v_2, ...v_m$ و $w_1, w_2, ..., w_m$ در فضای برداری V مستقل خطی باشند(هر مجموعه بردار v_i و w_i به صورت جداگانه مستقل خطی است) در نتیجه $v_1 + w_1, v_2 + w_2, ...v_m + w_m$ نیز مستقل خطی است

پاسخ با استفاده از یک مثال نقض نشان می دهیم حکم مسئله غلط است. فرض کنید مجموعه بردار های $v_1, v_2, ..., v_m$ مستقل خطی باشند. آنگاه به راحتی قابل نشان دادن است که $-v_1, -v_2, ... - v_m$ نیز مستقل خطی هستند. اما جمع هر $v_i + w_i$ برابر ۰ می شود و درنتیجه مجموعه تماما ۰ می شود که وابسته خطی هست. در نتیجه حکم مسئله غلط است.

پرسش ۳ (۲۰ نمره) اگر $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 5 \end{bmatrix}$ و $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ b \end{bmatrix}$، سه بردار در R^3 باشند، مقادیر a و b را به گونه‌ای بیابید که این سه بردار، وابسته خطی باشند.

پاسخ معادله $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$ را حل میکنیم و a و b را طوری پیدا میکنیم که این معادله جواب غیر بدیهی داشته باشد.
ماتریس افزوده را به صورت زیر تشکیل میدهیم:

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 4 & 0 \\ 0 & 5 & b & 0 \end{array}\right)$$

آن را به صورت بالا مثلثی کاهش میدهیم:

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 4 & 0 \\ 0 & 5 & b & 0 \end{array}\right) \quad -> \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & b & 0 \end{array}\right)$$

اگر $a \neq ۲$ باشد آنگاه:

$$-> \left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & a-۲ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & b-\frac{۲۰}{a-۲} & ۰ \end{array}\right)$$

برای اینکه جواب غیر بدیهی داشته باشیم باید حداقل یکی از سطرها pivot نداشته باشد. اگر $a = ۲$ باشد، هیچ مقداری برای b قابل قبول نیست و در غیر این صورت مقادیر $b = \frac{۲۰}{a-۲}$ قابل قبولند.

پرسش ۴ (۲۰ نمره) می‌دانیم که نرم p یک بردار x به صورت روبرو تعریف می‌شود: $\|x\|_p = \left(\sum_{k=۱}^{n} |x_k|^p\right)^{۱/p}$

(آ) (۱۰ نمره) اثبات کنید به ازای هر p و q به شرطی که داشته باشیم $۰ < p < q$ عبارت زیر درست است:

$$\|x\|_p \geq \|x\|_q$$

(ب) (۱۰ نمره) اثبات کنید به ازای هر p و q به شرطی که داشته باشیم $۰ < p < q$ عبارت زیر درست است:

$$\|x\|_p \leq n^{۱/p-۱/q}\|x\|_q$$

(راهنمایی: دو مقدار حقیقی p و q را مقادیری حقیقی در بازه $[۱,\infty[$ در نظر بگیرید که رابطه $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q} = ۱$ بینشان برقرار است. آنگاه برای دو بردار متناهی $a = (a_۱, a_۲, \cdots, a_n)$ و $b = (b_۱, b_۲, \cdots, b_n)$ داریم که $\sum_{i=۱}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=۱}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{۱}{q}} \left(\sum_{i=۱}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}}$)

پاسخ

(آ) بردار y را به این صورت تعریف می‌کنیم که: $y = \frac{x}{\|x\|_p}$ در نتیجه برای این بردار داریم که $\|y\|_p = ۱$

$$|x_k|^p \leq \sum |x_k|^p \longrightarrow |x_k| \leq \|x\|_p \longrightarrow |y_k| \leq ۱$$

$$\|y\|_q = \left(\sum |y_k|^q\right)^{\frac{۱}{q}} \leq \left(\sum |y_k|^p\right)^{\frac{۱}{q}} = \|y\|_p{}^{\frac{p}{q}} = ۱$$

$$\|y\|_q = \|\frac{x}{\|x\|_p}\|_q = \frac{\|x\|_q}{\|x\|_q} \leq ۱ \longrightarrow \|x\|_p \leq \|x\|_q$$

(ب) با استفاده از نامساوی کوشی_شوارتز داریم که:

$$\|x\|_۱ = \sum_{i=۱}^{n} |x_i| = \sum_{i=۱}^{n} |x_i| \cdot ۱ \leq \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} \left(\sum_{i=۱}^{n} ۱^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{n}\|x\|_۲$$

همچنین با توجه به نامساوی داده شده داخل راهنمایی داریم که:

$$\|x\|_۱ = \sum_{i=۱}^{n} |x_i| = \sum_{i=۱}^{n} |x_i| \cdot ۱ \leq \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲\right)^{۱/۲} \left(\sum_{i=۱}^{n} ۱^۲\right)^{۱/۲} = \sqrt{n}\|x\|_۲$$

حال دو بردار a و b را به این صورت در نظر می‌گیریم که $|a_i| = |x_i|^p, |b_i| = ۱$ و $r = \frac{q}{p} > ۱$

$$\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p = \sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p \cdot ۱ \leq \left(\sum_{i=۱}^{n} (|x_i|^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{i=۱}^{n} ۱^{\frac{q}{q-p}}\right)^{۱-\frac{p}{q}} = \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^q\right)^{\frac{p}{q}} n^{۱-\frac{p}{q}}$$

در نهایت با استفاده از معادلات بالا داریم که:

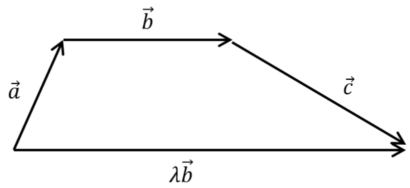
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p\right)^{۱/p} \leq \left(\left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^q\right)^{\frac{p}{q}} n^{۱-\frac{p}{q}}\right)^{۱/p} = \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^q\right)^{\frac{۱}{q}} n^{\frac{۱}{p}-\frac{۱}{q}} = n^{۱/p-۱/q}\|x\|_q$$

در نهایت با توجه به اینکه $p > q$ داریم که $\frac{۱}{p} - \frac{۱}{q} > ۰$ و شرط مورد نظر سوال اثبات خواهد شد.

پرسش ۵ (۲۰ نمره) سه بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را درنظر بگیرید که رابطه $\lambda\vec{b} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ برایشان صادق است. و بردار های $\vec{a}$ و $\vec{c}$ به طور کلی با $\vec{b}$ هم‌جهت اند (به این معنی که حاصل ضرب داخلی‌شان مثبت است). حال برای این بردار ها ثابت کنید که:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^۲ = \|\vec{b}+\vec{c}\|^۲ \iff \|\vec{a}\|^۲ = \|\vec{c}\|^۲$$

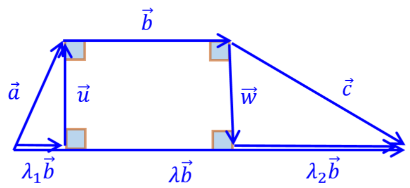
(راهنمایی: حل این سوال بدون شهود اولیه مشکل است. توصیه میشود که برای حل راحت تر به این سه بردار و رابطه بینشان به عنوان مدل جبری خوبی برای توصیف یک ذوزنقه دلخواه نگاه کنید همان طور که درشکل برایتان آورده شده. از دید هندسی‌تان و تجزیه $\vec{a}$ و $\vec{c}$ به مولفه های عمود و همراستای $\vec{b}$ در این اثبات کمک بگیرید)



پاسخ $\vec{a}$ و $\vec{c}$ را به مولفه‌های عمود و در راستای $\vec{b}$ تجزیه میکنیم:

$$\vec{a} = \lambda_۱\vec{b} + \vec{u}: \quad \vec{b}.\vec{u} = ۰, \lambda_۱ = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}$$

$$\vec{c} = \lambda_۲\vec{b} + \vec{w}: \quad \vec{b}.\vec{w} = ۰, \lambda_۲ = \frac{\vec{c}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}$$



باتوجه به شهودی که از شکل داریم حس میکنیم که رابطه های زیر احتمالا درست اند:

$$\lambda\vec{b} = \lambda_۱\vec{b} + \vec{b} + \lambda_۲\vec{b} \Rightarrow \lambda = \lambda_۱ + ۱ + \lambda_۲ \quad , \quad \vec{u} = -\vec{w}$$

حال به طوری جبری سعی میکنیم که این خواص را چک کنیم:

$$\begin{aligned}
&\lambda\vec{b} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \\
&\left(\lambda_۱\vec{b} + \vec{u}\right) + \vec{b} + \left(\lambda_۲\vec{b} + \vec{w}\right) = \\
&(\lambda_۱ + ۱ + \lambda_۲)\,\vec{b} + \vec{u} + \vec{w}
\end{aligned}$$

با ضرب داخلی $\vec{b}$ در دو طرف:

$$\begin{aligned}
&\lambda\vec{b}.\vec{b} = (\lambda_۱ + ۱ + \lambda_۲)\,\vec{b}.\vec{b} + \vec{u}.\vec{b} + \vec{w}.\vec{b} \Rightarrow \\
&\lambda\|\vec{b}\|^۲ = (\lambda_۱ + ۱ + \lambda_۲)\,\|\vec{b}\|^۲ + ۰ + ۰ \overset{\vec{b}\neq ۰}{\Rightarrow} \\
&\lambda = \lambda_۱ + ۱ + \lambda_۲
\end{aligned}$$

و لزا می‌توانیم استدلال کنیم:

$$\begin{aligned}
&\lambda\vec{b} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \\
&\lambda\vec{b} = (\lambda_۱ + ۱ + \lambda_۲)\,\vec{b} + u + w \Rightarrow \\
&\lambda\vec{b} = \lambda\vec{b} + u + w \Rightarrow \vec{u} = -\vec{w}
\end{aligned}$$

حال که درستی درک شهودی‌مان مطلق و جبری ثابت شد، ازشان استفاده و سعی به اثبات می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\|\vec{a} + \vec{b}\|^۲ = \|\vec{b} + \vec{c}\|^۲ \Leftrightarrow \|(\lambda_۱\vec{b} + \vec{u}) + \vec{b}\|^۲ = \|\vec{b} + (\lambda_۲\vec{b} + \vec{w})\|^۲ \Leftrightarrow \\
&\|(\lambda_۱ + ۱)\vec{b} + \vec{u}\|^۲ = \|(\lambda_۲ + ۱)\vec{b} + \vec{w}\|^۲ \overset{\text{فیثاغورس}}{\Longleftrightarrow} (\lambda_۱ + ۱)^۲\|\vec{b}\|^۲ + \|\vec{u}\|^۲ = (\lambda_۲ + ۱)^۲\|\vec{b}\|^۲ + \|\vec{w}\|^۲ \\
&\overset{\vec{u}=-\vec{w}}{\Longleftrightarrow} (\lambda_۱ + ۱)^۲\|\vec{b}\|^۲ = (\lambda_۲ + ۱)^۲\|\vec{b}\|^۲ \overset{\vec{b}\neq ۰}{\Longleftrightarrow} (\lambda_۱ + ۱)^۲ = (\lambda_۲ + ۱)^۲ \Leftrightarrow |\lambda_۱ + ۱| = |\lambda_۲ + ۱|
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\lambda_1 = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$ و $\lambda_2 = \frac{\vec{c}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$ و به طور کلی هم جهت بودن $\vec{a}$ و $\vec{c}$ با $\vec{b}$ خواهیم داشته که $\lambda_1 \geq 0$ و $\lambda_2 \geq 0$ لذا:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 + 1 = \lambda_2 + 1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1^2 = \lambda_2^2 \Leftrightarrow \lambda_1^2\|\vec{b}\|^2 = \lambda_2^2\|\vec{b}\|^2 \\
&\xLeftrightarrow{\vec{u}=-\vec{w}} \lambda_1^2\|\vec{b}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 = \lambda_2^2\|\vec{b}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 \xLeftrightarrow{\text{فیثاغورس}} \\
&\|\lambda_1\vec{b} + \vec{u}\|^2 = \|\lambda_2\vec{b} + \vec{w}\|^2 \Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{c}\|^2
\end{aligned}
$$

پرسش ۶ (۳۰ نمره)

آ)(۱۰ نمره) $C[-\pi, \pi]$ را فضای برداری تمام توابع پیوسته حقیقی با دامنهٔ $[-\pi, \pi]$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید این فضا مجهز به ضرب داخلی زیر باشد:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

حال فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت دلخواه است. نشان دهید توابع زیر یک مجموعه از بردارهای یکه‌ـ‌متعامد در $C[-\pi, \pi]$ می‌سازند:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

با توجه به بخش قبلی سوال، میتوانیم برای توابع متناوب با دامنه تناوب T ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g(t)\, dt$$

همچنین همانند قسمت قبل می‌توان اثبات کرد که توابع زیر، یک مجموعه نامتناهی از بردارهای متعامد می‌سازند.

$$1, \sin\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cdots, \sin n\omega_0 t, \cdots, \cos\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cdots, \cos n\omega_0 t, \cdots$$

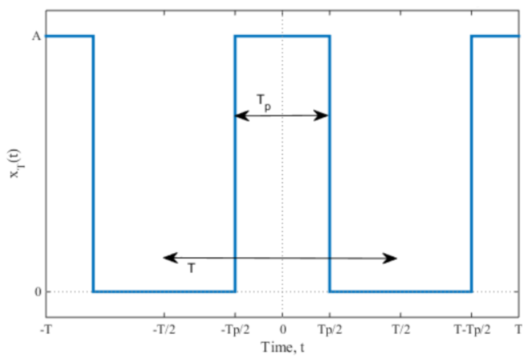
در نتیجه هر تابعی مانند $f(t)$ را می‌توان بر حسب پایه‌های بدست آمده به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

حال با استفاده از اطلاعات داده شده، توابع داده شده در قسمت‌های زیر را بر حسب پایه‌های داخل سوال بدست آورید.(راهنمایی: اگر یک تابع دامنه تناوب آن T باشد، مقدار ω_0 از رابطه $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ بدست می‌آید.

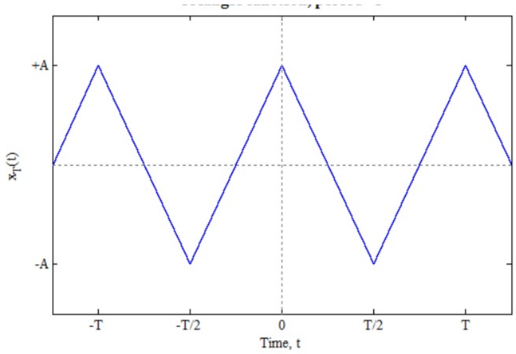
ب) (۱۰ نمره) موج مربعی: (در ادامه رفتار تابع در یک نوسان($|t| < \frac{T}{2}$) توضیح داده شده است)

$$x_T(t) = \begin{cases} A & |t| < \frac{T_p}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T_p}{2} \end{cases}$$



ج) (۱۰ نمره) موج مثلثی: (در ادامه رفتار تابع در یک نوسان($|t| < \frac{T}{2}$) توضیح داده شده است)

$$x_T(t) = \begin{cases} A + \frac{4A}{T}t & t < 0 \\ A - \frac{4A}{T}t & t > 0 \end{cases}$$



پاسخ

(آ) باید نشان دهیم که ۱) هر دو عضو متمایز از توابع داده شده متعامد هستند، و ۲) نُرم آن‌ها برابر با ۱ است.

۱) تعامد

کافیست بگوییم ضرب داخلی هر دو عضو متمایز از توابع داده شده برابر با ۰ است

فرض کنید دو عدد صحیح مثبت i و j به طوری که $i < j$ را اخذ کرده‌ایم. اکنون به ازای حالات مختلف انتخاب توابع از مجموعه توابع داده شده، ضرب داخلی را محاسبه می‌کنیم.

اگر هر دو تابع کسینوسی باشند:

$$\langle \frac{\cos ix}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos ix \cos jx}{\pi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((i-j)x) + \cos((i+j)x)) dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} (\frac{\sin(i-j)x}{i-j} + \frac{\sin(i+j)x}{i+j}) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

اگر هر دو تابع سینوسی باشند:

$$\langle \frac{\sin ix}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin ix \sin jx}{\pi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((i-j)x) - \cos((i+j)x)) dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} (\frac{\sin(i-j)x}{i-j} - \frac{\sin(i+j)x}{i+j}) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

اگر یکی کسینوسی و دیگری سینوسی باشد (با ضرایب متفاوت):

$$\langle \frac{\sin ix}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin ix \cos jx}{\pi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin((i+j)x) + \sin((i-j)x)) dx$$
$$= -\frac{1}{2\pi} (\frac{\cos(i+j)x}{i+j} + \frac{\cos(i-j)x}{i-j}) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

اگر ضرایب یکسان باشند:

$$\langle \frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin jx \cos jx}{\pi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin((2j)x) + \sin(0x)) dx$$
$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(2j)x}{2j} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

اگر یکی کسینوسی و دیگری $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ باشد:

$$\langle \frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos jx dx = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{\sin jx}{j} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

اگر یکی سینوسی و دیگری $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ باشد:

$$\langle \frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin jx dx = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{\cos jx}{j} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

پس ضرب داخلی هر دو تابعی برابر با ۰ است که نتیجه می‌دهد این توابع متعامدند.

۲) یکه بودن

نرم هر یک از توابع را به ازای $1 \le j \le n$ دلخواه بررسی می‌کنیم:

$$\left\|\frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}}\right\|^2 = \langle\frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 jx dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2jx)dx = \frac{1}{2\pi}(x + \frac{\sin 2jx}{2j})\Big|_{-\pi}^{\pi} = 1$$

$$\Longrightarrow \left\|\frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}}\right\| = 1$$

$$\left\|\frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}\right\|^2 = \langle\frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 jx dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2jx)dx = \frac{1}{2\pi}(x - \frac{\sin 2jx}{2j})\Big|_{-\pi}^{\pi} = 1$$

$$\Longrightarrow \left\|\frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}\right\| = 1$$

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\|^2 = \langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1 \Longrightarrow \left\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\| = 1$$

پس توابع داده شده یکه نیز هستند.

(ب) میدانیم که هر یک از ضرایب a_0, a_n, b_n را می‌توان با استفاده از ضرب داخلی به صورت زیر نوشت:

$$a_0 = \frac{\langle f(t), 1\rangle}{\|1\|} \qquad a_n = \frac{\langle f(t), \cos n\omega_0 t\rangle}{\|\cos n\omega_0 t\|} \qquad b_n = \frac{\langle f(t), \sin n\omega_0 t\rangle}{\|\sin n\omega_0 t\|}$$

برای بدست آوردن نرم‌های موردنیاز نیز می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\|1\| = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1^2\, dt = T \qquad \|\cos n\omega_0 t\| = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t^2\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2n\omega_0 t)\, dt = \frac{T}{2}$$

$$\|\sin n\omega_0 t\| = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t^2\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2n\omega_0 t)\, dt = \frac{T}{2}$$

اکنون با توجه به شکل تابع $f(t)$ می‌توان ضرایب را بدست آورد.

$$a_0 = \frac{1}{T}\langle f(t), 1\rangle = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt = A\frac{T_p}{T}$$

با توجه به اینکه تابع $f(t)$ یک تابع زوج است($f(t) = f(-t)$) در نتیجه تمامی جملات فرد برابر با صفر هستند($b_n = 0$).

$$a_n = \frac{2}{T}\langle f(t), \cos n\omega_0 t\rangle = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

با توجه به اینکه این تابع تنها در بازه $[-\frac{T_p}{2}, \frac{T_p}{2}]$ مقدار غیر صفردارد و در بقیه بازه‌ها مقدار این تابع برابر با صفر است، می‌توان مقدار a_n را به شکل زیر نوشت:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} A\cos n\omega_0 t\, dt = \frac{2}{T}\frac{A}{n\omega_0}\sin n\omega_0 t\Big|_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} = \frac{2A}{Tn\omega_0}\left(\sin\left(n\omega_0\frac{T_p}{2}\right) - \sin\left(-n\omega_0\frac{T_p}{2}\right)\right)$$

با توجه به اینکه $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ و با توجه به اینکه سینوس یک تابع فرد است($\sin(x) = -\sin(-x)$)

$$a_n = \frac{4}{T}\frac{A}{n\omega_0}\sin\left(n\omega_0\frac{T_p}{2}\right) = 2\frac{A}{n\pi}\sin\left(n\pi\frac{T_p}{2}\right)$$

در نتیجه می‌توان این تابع را به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = A\frac{T_p}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\frac{A}{n\pi}\sin\left(n\pi\frac{T_p}{2}\right)\cos(n\omega_0 t)\right)$$

(ج) با توجه به بخش قبل داریم که:

$$a_0 = \frac{1}{T}\langle f(t), 1\rangle \qquad a_n = \frac{2}{T}\langle f(t), \cos(n\omega_0 t)\rangle \qquad b_n = \frac{2}{T}\langle f(t), \sin(n\omega_0 t)\rangle$$

با توجه به شکل $f(t)$ می‌دانیم که این تابع، یک تابع زوج است و در نتیجه ضرایب مربوط به جملات فرد آن برابر صفر هستند.

$$b_n = 0$$

حال مانند بخش قبل به بدست آوردن ضرایب a_0, a_n می‌پردازیم.

$$a_0 = \frac{1}{T}\langle f(t), 1\rangle = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\langle f(t), \cos(n\omega_0 t)\rangle = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} \left(A - \frac{4A}{T}t\right)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{4A}{t}\left(\int_{0}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)\,dt - \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} t\cos(n\omega_0 t)\,dt\right)$$

با استفاده از انتگرال جزء به جزء و با توجه به اینکه $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ به عبارت زیر می‌رسیم.

$$a_n = \frac{4A}{T}\left(\frac{T\sin(\pi n)}{2\pi n} + \frac{4}{T}\frac{T^2\left(2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 - \pi n\sin(\pi n)\right)}{4\pi^2 n^2}\right) = \frac{8A\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2}{\pi^2 n^2}$$

در نهایت می‌توان این تابع را به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{8A}{\pi^2(2k+1)^2}\cos\left((2k+1)\,\omega_0 t\right)\right)$$

سوالات عملی (۳۰ نمره) — تاریخ تحویل: ۱۷ فروردین ۱۴۰۱

پرسش ۱ (۳۰ نمره) فضای برداری $\mathbb{Z}_2^n$ را در نظر بگیرید. هر بردار از این فضا متناظر یک رشته باینری به طول n است. عملیات جمع دو بردار در این فضا هم معادل عملیات xor دو رشته باینری است. همچنین یک ترکیب خطی از تعدادی از اعضای این فضا، متناظر xor یک زیرمجموعه از آن بردارها است.

بردارهای $v_1, v_2, \ldots, v_m$ داده شده‌است.

به ازای هر $1 \le k \le m$ بررسی کنید آیا $v_k \in span(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ یا خیر.

ورودی

در خط اول ورودی دو عدد n و m که با یک فاصله از هم جدا شده‌اند آمده است. در هر کدام از m سطر بعدی یک رشته باینری به طول n بدون فاصله آمده است.

$$1 \le n, m \le 500$$

خروجی

در خروجی m خط چاپ کنید که هر کدام در صورت برقرار بودن شرط گفته شده 'YES' و در غیر اینصورت 'NO' باشد.

ورودی نمونه ۱

```
3 7
000
001
011
010
010
110
111
```

خروجی نمونه ۱

```
YES
NO
NO
YES
YES
NO
YES
```

ورودی نمونه ۲

```
3 7
111
111
111
010
111
101
001
```

خروجی نمونه ۲

```
NO
YES
YES
NO
YES
YES
NO
```

ورودی نمونه ۳

```
5 10
00000
00000
01110
00110
00000
10100
01010
10100
00000
11111
```

خروجی نمونه ۳

```
YES
YES
NO
NO
YES
NO
NO
YES
YES
NO
```

پاسخ

```python
import numpy as np

n, m = map(int, input().split())

base = np.zeros((n, n), dtype=bool)

for x in range(m):
    v = input()
    vector = np.array(np.zeros(n), dtype=bool)
    for i in range(n):
        if v[i] == '1':
            vector[i] = True
```

```
    for i in range(n):
        if vector[i] == 1:
            vector = np.bitwise_xor(vector, base[i])

    if np.any(vector):
        print('NO')
        for i in range(n):
            if vector[i]:
                base[i] = vector
                break
    else:
        print('YES')
```