

## جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رضائی  
بهار ۱۴۰۲



تاریخ انتشار: ۲۷ اردیبهشت ۱۴۰۲

### تمرین چهارم

تجزیه، مقادیر و بردارهای ویژه

۱. پرسش‌های خود در مورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر پاسخ: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید تا سقف ۱۵ روز تمرین خود را با تاخیر ارسال کنید. پس از آن به ازای هر ساعت تاخیر ۵۰ درصد نمره کسر خواهد شد. مقیاس محاسبه تاخیر ساعت است و تاخیر شما رو به بالا گرد خواهد شد تا به مقیاس ساعت درآید. به عنوان مثال ۲ ساعت و ۱۰ دقیقه تاخیر معادل ۳ ساعت در نظر گرفته خواهد شد. تمرین تئوری و عملی در محاسبه تاخیرها دو تمرین جداگانه در نظر گرفته خواهند شد. یعنی ۲ روز تاخیر بر تمرین تئوری و ۱ روز تاخیر بر تمرین عملی در مجموع برابر ۳ روز در نظر گرفته خواهد شد. در نهایت اگر بیش از ۱۵ روز تاخیر داشته باشید، تاخیر مجاز شما به نحو بهینه‌ای توزیع خواهد شد که کمترین میزان نمره را از دست بدهید.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل تمرین: دانشجویان می‌توانند در حل تمرین برای رفع ابهام و یا بدست آوردن ایده کلی با یک دیگر مشارکت و هم‌فکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه درس می‌باشد چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما بدست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً منحصرأ توسط خود دانشجو انجام شود. بیشینه اندازه مجاز گروهی که در آن می‌توانید برای حل تمرین هم‌فکری کنید برابر ۴ نفر است. رعایت آداب‌نامه‌ی انجام تمرین‌های درسی الزامی است. در صورت مشاهده تخلف مطابق قوانین دانشکده و دانشگاه برخورد خواهد شد.

تاریخ تحویل: ۱۰ خرداد ۱۴۰۲

### سوالات تئوری (۱۴۰ نمره)

پرسش ۱ (۱۵ نمره) با کمک gram-schmidt ماتریس A را به صورت QR تجزیه کنید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

پرسش ۲ (۲۰ نمره) اگر A دارای رنک n (رتبه ستون کامل) باشد آنگاه دارای وارون چپ مطابق زیر است

$$L = (A^T A)^{-1} A^T$$

به طوری که

$$LA = I$$

توضیح دهید چرا  $A^+ = L$  همچنین اگر A دارای رنک m (رتبه سطر کامل) باشد آنگاه دارای وارون راست مطابق زیر است

$$R = A^T (AA^T)^{-1}$$

به طوری که

$$AR = I$$

توضیح دهید چرا  $A^+ = R$  در نهایت  $A^+$  را برای ماتریس‌های زیر حساب کنید

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$$

پرسش ۳ (۲۰ نمره) فرض کنید A یک ماتریس  $n \times n$  باشد. همچنین فرض کنید  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  مقادیر ویژه حقیقی متناظر با بردارویژه‌های ماتریس A یعنی  $u_1, u_2, \dots, u_n$  باشند.  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$  قرار دهید:

$$x_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$$

که  $c_1, c_2, \dots, c_n$  اعدادی حقیقی هستند و  $c_1 \neq 0$ . سپس تعریف می‌کنیم:

$$x_{k+1} = Ax_k \text{ for } k = 0, 1, 2, \dots$$

اکنون قرار دهید:

$$\beta_k = \frac{x_k \cdot x_{k+1}}{x_k \cdot x_k} = \frac{x_k^T x_{k+1}}{x_k^T x_k}$$

ثابت کنید:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \lambda_1$$

پرسش ۴ (۲۵ نمره) ماتریس  $A = (a_{ij}) n \times n$  را در نظر بگیرید که تمام درایه‌های آن نامنفی و جمع درایه‌های هر ردیف برابر با ۱ باشد. یعنی:

$$\forall_{1 \leq i, j \leq n \in \mathbb{N}} : a_{ij} \geq 0 \text{ and } \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

گزاره‌های زیر را اثبات کنید:

الف) ماتریس  $A$  مقدار ویژه‌ای برابر با ۱ دارد.

ب) اندازه‌ی تمام مقادیر ویژه‌ی  $A$  کوچکتر یا مساوی ۱ است.

پرسش ۵ (۳۰ نمره) درایه‌های ماتریس مربعی  $A(x)$  چندجمله‌ای می‌باشند. اگر  $\det(A(x)) = 1$  باشد، ثابت کنید درایه‌های ماتریس  $A^{-1}(x)$  نیز چندجمله‌ای اند. (راهنمایی: رابطه بین ماتریس وارون و ماتریس Cofactor را ثابت و از آن بهره ببرید.)

تاریخ تحویل: ۱۲ خرداد ۱۴۰۲

## سوالات عملی (۳۲ نمره)

پرسش ۱ (۳۲ نمره) محاسبه مقدار ویژه و بردار ویژه یک ماتریس برای کامپیوتر، از جهت اینکه نیاز به حل دستگاه معادلات دارد، کار ساده‌ای نیست. به همین منظور راه‌های مبتنی بر محاسبات گام‌به‌گام برای محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه معرفی شده‌اند. یکی از این روش‌ها استفاده از تجزیه QR ماتریس است. محاسبه مقدار ویژه یک ماتریس با این روش به این صورت است که ماتریس را تجزیه QR می‌کنیم و مقدار جایگزین  $A$  را به صورت  $RQ$  محاسبه می‌کنیم. با ادامه این فرآیند مقادیر روی قطر اصلی به مقادیر ویژه ماتریس  $A$  همگرا می‌شوند. در این تمرین شما باید مقادیر ویژه و دترمینان ماتریس  $A$  را به کمک تجزیه QR محاسبه کنید.

### ورودی

در خط اول ورودی عدد  $n$  می‌آید بیانگر ابعاد ماتریس مربعی متقارن و وارون‌پذیر است و سپس در  $n$  خط بعدی سطرهای ماتریس می‌آید.

$$n < 30$$

### خروجی

در خط اول خروجی باید مقادیر ویژه به ترتیب صعودی و تا سه رقم اعشار و در خط دوم دترمینان آن تا سه رقم اعشار قرار بگیرد.

### مثال

#### ورودی نمونه

1	4			
2	5.000	3.000	3.000	6.000
3	3.000	9.000	3.500	6.500
4	3.000	3.500	7.000	5.000
5	6.000	6.500	5.000	6.000

#### خروجی نمونه

1	-1.405	3.243	4.552	20.610
2	-427.500			