به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۲

تجزیه، مقادیر و بردارهای ویژه | **تمرین چهارم** | تاریخ انتشار: ۲۷ اردیبهشت ۱۴۰۲

۱. پرسش‌های خود در مورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر پاسخ:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید تا سقف ۱۵ روز تمارین خود را با تاخیر ارسال کنید. پس از آن به ازای هر ساعت تاخیر ۵.۰ درصد نمره کسر خواهد شد. مقیاس محاسبه تاخیر ساعت است و تاخیر شما رو به بالا گرد خواهد شد تا به مقیاس ساعت درآید. به عنوان مثال ۲ ساعت و ۱۰ دقیقه تاخیر معادل ۳ ساعت در نظر گرفته خواهد شد. تمارین تئوری و عملی در محاسبه تاخیرها دو تمرین جداگانه در نظر گرفته خواهند شد. یعنی ۲ روز تاخیر بر تمرین تئوری و ۱ روز تاخیر بر تمرین عملی در مجموع برابر ۳ روز در نظر گرفته خواهد شد. در نهایت اگر بیش از ۱۵ روز تاخیر داشته باشید، تاخیر مجاز شما به نحو بهینه‌ای توزیع خواهد شد که کمترین میزان نمره را از دست بدهید.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا بدست آوردن ایده کلی با یک دیگر مشارکت و هم‌فکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه درس می‌باشد چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما بدست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما منحصرا توسط خود دانشجو انجام شود. بیشینه اندازه مجاز گروهی که در آن می‌توانید برای حل تمرین هم‌فکری کنید برابر ۴ نفر است. رعایت آداب‌نامه‌ی انجام تمرین‌های درسی الزامی است. در صورت مشاهده تخلف مطابق قوانین دانشکده و دانشگاه برخورد خواهد شد.

سوالات تئوری (۱۴۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۰ خرداد ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۱۵ نمره) با کمک gram-schmidt ماتریس A را به صورت QR تجزیه کنید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

پاسخ

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ و } \vec{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \vec{v_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

طبق الگوریتم gram-schmidt :

$$\vec{u_i} = \vec{v_i} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\vec{u_j}\vec{v_i}}{|\vec{v_i}|^2}$$
$$\vec{e_i} = \frac{\vec{u_i}}{|\vec{u_i}|}$$

بنابراین:

$$\vec{u_1} = \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ، } \vec{e_1} = \frac{\vec{u_1}}{|\vec{u_1}|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u_2} = \vec{v_2} - \frac{-2}{(2\sqrt{3})^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{v_2} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{6} \end{bmatrix}$$

$$\vec{e_2} = \frac{\vec{u_2}}{|\vec{u_2}|} = \begin{bmatrix} \frac{13\sqrt{105}}{210} \\ \frac{11\sqrt{105}}{210} \\ \frac{\sqrt{105}}{70} \\ -\frac{11\sqrt{105}}{210} \end{bmatrix}$$

$$\vec{e_3} = \frac{\vec{u_3}}{|\vec{u_3}|} = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{70}}{35} \\ \frac{3\sqrt{70}}{70} \\ \frac{2\sqrt{70}}{35} \\ \frac{-3\sqrt{70}}{70} \end{bmatrix} \quad \vec{u_3} = \vec{v_3} - \frac{12}{(2\sqrt{3})^2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-8}{(\frac{\sqrt{105}}{3})^2}\begin{bmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{52}{35} \\ -\frac{44}{35} \\ -\frac{12}{35} \\ \frac{44}{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{18}{35} \\ \frac{9}{35} \\ \frac{12}{35} \\ -\frac{9}{35} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u_4} = \vec{v_4} - \frac{11}{(2\sqrt{3})^2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-\frac{23}{6}}{(\frac{\sqrt{105}}{3})^2}\begin{bmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{6} \end{bmatrix} - -\frac{\frac{57}{35}}{\frac{3\sqrt{70}}{35}}\begin{bmatrix} -\frac{18}{35} \\ \frac{9}{35} \\ \frac{12}{35} \\ -\frac{9}{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{e_4} = \frac{\vec{u_4}}{|\vec{u_4}|} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

پس Q به دست آمد حال باید R را به دست آوریم:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{13\sqrt{105}}{210} & \frac{11\sqrt{105}}{210} & \frac{\sqrt{105}}{70} & \frac{-11\sqrt{105}}{210} \\ -\frac{3\sqrt{70}}{35} & \frac{3\sqrt{70}}{70} & \frac{2\sqrt{70}}{70} & -\frac{3\sqrt{70}}{70} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{13\sqrt{105}}{210} & \frac{11\sqrt{105}}{210} & \frac{\sqrt{105}}{70} & \frac{-11\sqrt{105}}{210} \\ -\frac{3\sqrt{70}}{35} & \frac{3\sqrt{70}}{70} & \frac{2\sqrt{70}}{70} & -\frac{3\sqrt{70}}{70} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 2\sqrt{3} & \frac{-11\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{105}}{3} & -\frac{8\sqrt{105}}{35} & -\frac{23\sqrt{105}}{210} \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{70}}{35} & -\frac{19\sqrt{70}}{70} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

پرسش ۲ (۲۰ نمره) اگر A دارای رنک n (رتبه ستون کامل) باشد آنگاه دارای وارون چپ مطابق زیر است

$$L = (A^TA)^{-1}A^T$$

به طوری که

$$LA = I$$

توضیح دهید چرا $A^+ = L$ همچنین اگر A دارای رنک m (رتبه سطر کامل) باشد آنگاه دارای وارون راست مطابق زیر است

$$R = A^T(AA^T)^{-1}$$

به طوری که

$$AR = I$$

توضیح دهید چرا $A^+ = R$ در نهایت A^+ را برای ماتریس های زیر حساب کنید

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$$

پاسخ

اگر A دارای ستون های مستقل باشد آنگاه A^TA هم وارون پذیر است بنابراین $(A^TA)^{-1}A^TA = I$ بدیهی است و $AL = A(A^TA)^{-1}A^T$ ماتریس پروجکشن است روی فضای ستونی. حال اگر A به صورت رتبه سطر کامل باشد پس $AA^T(AA^T)^{-1} = I$ و $RA = A^T(AA^T)^{-1}A$ ماتریس پروجکشن روی فضای سطری است برای محاسبه A^+ می توان به دلیل رنک کامل ستونی بودن ماتریس A_1 گفت:

$$A_1^+ = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$$

و برای A_2^+:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -25 \\ -25 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 26 & -25 \\ -25 & 45 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{109} & \frac{5}{109} \\ \frac{5}{109} & \frac{26}{545} \end{pmatrix}$$

$$A_2^+ = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{109} & \frac{5}{109} \\ \frac{5}{109} & \frac{26}{545} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{109} & \frac{21}{545} \\ \frac{10}{109} & \frac{52}{545} \\ \frac{16}{109} & \frac{21}{109} \end{pmatrix}$$

پرسش ۳ (۲۰ نمره) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. همچنین فرض کنید $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی حقیقی متناظر با بردارویژه‌های ماتریس A یعنی $u_1, u_2, ...u_n$ باشند. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ قرار دهید:

$$x_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_n u_n$$

که $c_1, c_2, ..., c_n$ اعدادی حقیقی هستند و $c_1 \neq 0$. سپس تعریف می‌کنیم:

$$x_{k+1} = A x_k \quad for\ k = 0, 1, 2, ...$$

اکنون قرار دهید:

$$\beta_k = \frac{x_k \cdot x_{k+1}}{x_k \cdot x_k} = \frac{x_k^T x_{k+1}}{x_k^T x_k}$$

ثابت کنید:

$$\lim_{k \to \infty} \beta_k = \lambda_1$$

.

پاسخ داریم:

$$x_k = A x_{k-1} = A^2 x_{k-2} = ... = A^k x_0$$

$$\Rightarrow x_k = A^k x_0 = A^k \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i A^k u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda^k u_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall k > 0 \in \mathbb{Z} : x_k = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k u_i}$$

$$x_k \cdot x_k = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k u_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^k u_j \right)$$

$$= \sum_{i=1} \sum_{j=1} c_i c_j \lambda_i^k \lambda_j^k u_i . u_j$$

$$= \lambda_1^{2k} \sum_{i=1} \sum_{j=1} c_i c_j \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k u_i . u_j$$

$$\forall_{1 < i < n \in \mathbb{N}} : |\lambda_1| > |\lambda_i| \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right) = \begin{cases} 1 & if\ i = 1 \\ 0 & if\ i = 2, 3, ..., n \end{cases} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} x_k \cdot x_k = \lambda_1^{2k} c_1^2 u_1 \cdot u_1$$

به‌طور مشابه:

$$x_k \cdot x_{k+1} = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k u_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^{k+1} u_j \right)$$

$$= \sum_{i=1} \sum_{j=1} c_i c_j \lambda_i^k \lambda_j^{k+1} u_i . u_j$$

$$= \lambda_1^{2k+1} \sum_{i=1} \sum_{j=1} c_i c_j \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^{k+1} u_i . u_j$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} x_k \cdot x_{k+1} = \lambda_1^{2k+1} c_1^2 u_1 \cdot u_1$$

در نهایت با ترکیب روابط به‌دست آمده خواهیم داشت:

$$\lim_{k \to \infty} \beta_k = \frac{\lim_{k \to \infty} x_k \cdot x_{k+1}}{\lim_{k \to \infty} x_k \cdot x_k}$$

$$= \frac{\lambda_1^{2k+1} c_1^2 u_1 \cdot u_1}{\lambda_1^{2k} c_1^2 u_1 \cdot u_1}$$

$$= \lambda_1$$

پرسش ۴ (۲۵ نمره) ماتریس $n \times n$ $A = (a_{ij})$ را در نظر بگیرید که تمام درایه‌های آن نامنفی و جمع درایه‌های هر ردیف برابر با ۱ باشد. یعنی:

$$\forall_{1 \leq i,j \leq n \in \mathbb{N}} : a_{ij} \geq 0 \quad and \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

گزاره‌های زیر را اثبات کنید:

الف) ماتریس A مقدار ویژه‌ای برابر با ۱ دارد.

ب) اندازه‌ی تمام مقادیر ویژه‌ی A کوچکتر یا مساوی با ۱ است.

پاسخ الف)

محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

که نشان می‌دهد بردار ۱ بردارویژه‌ی متناظر با مقدارویژه‌ی ۱ برای ماتریس A است.

ب)

فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس A و بردار ویژه‌ی متناظر با آن v باشد. پس: $Av = \lambda v$

$$\Rightarrow \forall_{1 \geq i,j \geq n \in \mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i$$

v_k را درایه‌ای درنظر بگیرید که بیشترین اندازه را دارد:

$$|v_k| = \max\{|v_1|, |v_2|, ..., |v_n|\}$$

دقت کنید که: $|v_k| > 0$. زیرا در غیر این‌صورت $v = 0$ که با ناصفر بودن بردار ویژه در تناقض است. طبق رابطه‌ی قبلی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot |v_k| &= |a_{k1}v_1 + a_{k2}v_2 + \cdots + a_{kn}v_n| \\ &\leq a_{k1}|v_1| + a_{k2}|v_2| + \cdots + a_{kn}|v_n| && (\text{طبق نامساوی مثلثی و اینکه } a_{ij} \geq 0) \\ &\leq a_{k1}|v_k| + a_{k2}|v_k| + \cdots + a_{kn}|v_k| && (|v_k| \text{ ماکسیمال است.}) \\ &= (a_{k1} + a_{k2} + \cdots + a_{kn})|v_k| = |v_k|. \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{|v_k|>0} \lambda \leq 1$$

پس حکم ثابت می‌شود.

پرسش ۵ (۳۰ نمره) درایه‌های ماتریس مربعی A(x) چندجمله‌ای می‌باشند. اگر $det(A(x)) = 1$ باشد، ثابت کنید درایه‌های ماتریس $A^{-1}(x)$ نیز چندجمله‌ای اند. (راهنمایی: رابطه بین ماتریس وارون و ماتریس Cofactor را ثابت و از آن بهره ببرید.)

پاسخ داریم که $\sum_{i=1}^{n} A_{j,i}C_{j,i} = det(A)$

همچنین $\sum_{i=1}^{n} A_{k,i}C_{j,i} = det(B)$ که B ماتریس A است که سطر j ام آن برابر سطر k ام آن شده‌است. می‌دانیم ماتریسی که دو سطر برابر دارد، دترمینانش صفر است درنتیجه $det(B) = 0$.

بنابراین

$$AC^T = det(A)I \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)}C^T$$

.

در مسئله داریم که درایه‌های A چندجمله‌ای اند. پس درایه های C که به‌صورت ضرب و جمع و تفریق تعدادی از درایه‌های A اند نیز چندجمله‌ای اند. درنتیجه درایه‌های C^T نیز چندجمله‌ای می‌باشند. از آنجا که $det(A) = 1$ طبق تساوی به‌دست‌آمده:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}C^T = C^T$$

بنابراین درایه‌های A^{-1} نیز چندجمله‌ای اند.

سوالات عملی (۳۲ نمره)

تاریخ تحویل: ۱۲ خرداد ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۳۲ نمره) محاسبه مقدار ویژه و بردار ویژه یک ماتریس برای کامپیوتر، از جهت اینکه نیاز به حل دستگاه معادلات دارد، کار ساده‌ای نیست. به همین منظور راه‌های مبتنی بر محاسبات گام‌به‌گام برای محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه معرفی شده‌اند. یکی از این روش‌ها استفاده از تجزیه QR ماتریس است. محاسبه مقدار ویژه یک ماتریس با این روش به این صورت است که ماتریس را تجزیه QR می‌کنیم و مقدار جایگزین A را به صورت RQ محاسبه می‌کنیم. با ادامه این فرآیند مقادیر روی قطر اصلی به مقادیر ویژه ماتریس A همگرا می‌شوند. در این تمرین شما باید مقادیر ویژه و دترمینان ماتریس A را به کمک تجزیه QR محاسبه کنید.

ورودی

در خط اول ورودی عدد n می‌آید بیانگر ابعاد ماتریس مربعی متقارن و وارون‌پذیر است و سپس در n خط بعدی سطرهای ماتریس می‌آید.

$$n < ۳۰$$

خروجی

در خط اول خروجی باید مقادیر ویژه به ترتیب صعودی و تا سه رقم اعشار و در خط دوم دترمینان آن تا سه رقم اعشار قرار بگیرد.

مثال

ورودی نمونه

```
4
5.000    3.000    3.000    6.000
3.000    9.000    3.500    6.500
3.000    3.500    7.000    5.000
6.000    6.500    5.000    6.000
```

خروجی نمونه

```
-1.405    3.243    4.552    20.610
-427.500
```

پاسخ