به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاییز ۱۴۰۲

قضایای اسلاید Basis

مثال ۱

کدام یک یکتا است؟

(آ) نشان دادن یک بردار بر اساس یک پایه خاص.

(ب) پایه برای $\mathbb{R}^2$.

(ج) پایه‌های یکه برای مورد قبل.

(آ) یکتا نبودن این مورد با استقلال خطی پایه در تضاد است.

(ب) به طور کلی پایه‌ها یکتا نیستند. به طور مثال

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

(ج) مثال قبلی در این مورد را هم نقض می‌کند.

مثال ۲

(آ) پایه استاندارد برای $P_n(\mathbb{R})$ چیست؟

(ب) آیا $x - ۱$ و $x + ۱$ و $x^۲$ یک پایه برای $P_۲(\mathbb{R}^۲)$ هستند؟

(آ) پایه استاندارد برای $P_n(\mathbb{R})$ برابر است با

$$۱, x, x^۲, \dots, x^n$$

(ب) اول باید نشان دهیم که این ۳ تابع هر تابعی به فرم $ax_۲ + bx + c$ را میسازند. کافی است قرار دهیم

$$\alpha_۱ = a \ , \ \alpha_۲ = \frac{b+c}{۲} \ , \ \alpha_۳ = \frac{b-c}{۲}$$

انگاه خواهیم داشت

$$\alpha_۱ x^۲ + \alpha_۲(x+۱) + \alpha_۳(x-۱) = ax^۲ + bx + c$$

حال که نشان دادیم همه توابع را می‌سازند باید استقلال آن‌ها را نشان دهیم.

$$\alpha_۱ x^۲ + \alpha_۲(x+۱) + \alpha_۳(x-۱) = ۰$$
$$\implies \alpha_۱ = ۰ \ , \ \alpha_۲ + \alpha_۳ = ۰ \ , \ \alpha_۲ - \alpha_۳ = ۰$$
$$\implies \alpha_۱ = ۰ \ , \ \alpha_۲ = ۰ \ , \ \alpha_۳ = ۰$$

قضیه ۱

فرض کنید $x_۱,\dots,x_m$ یک پایه برای یک فضای برداری باشد. آنگاه هر مجموعه از بردارهای مستقل خطی V تعدادش بیشتر از m نیست.

در ابتدا فرض می‌کنیم که تعداد اعضای مجموعه V از m بیشتر باشد. حال چون X یک پایه می‌باشد می‌توانیم هرکدام از v_i هارا می‌توانیم بر اساس $x_۱,\dots,x_m$ بنویسیم.

$$v_i = \sum_{j=۱}^{m} \alpha_{ij} x_j$$

حال با توجه به اینکه v_i ها مستقل هستند تنها جواب معادله

$$\sum_{i=۱}^{n} \beta_i v_i = ۰$$

باید برابر با $\forall_i \beta_i = ۰$ باشد اما داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} \beta_i \sum_{j=۱}^{m} \alpha_{ij} x_j = \sum_{j=۱}^{m} x_j \sum_{i=۱}^{n} \beta_i \alpha_{ij} = ۰$$

با توجه به اینکه X یک پایه است پس یک مجموعه مستقل خطی است پس داریم.

$$\forall_j \quad \sum_{i=۱}^{n} \beta_i \alpha_{ij} = ۰$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۲۱} & \dots & a_{n۱} \\ a_{۱۲} & a_{۲۲} & \dots & a_{n۲} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{۱m} & a_{۲m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_۱ \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix}$$

حال اگر بخواهیم این معادله را با عملیات‌های سطری حل کنیم، با توجه به اینکه تعداد معادلات از تعداد متغیرها از تعداد معادلات بیشتر هستند، حداقل یک free variable خواهیم داشت. بنابراین این معادله برای β ها جواب غیربدیهی دارد و این با استقلال خطی v_i ها در تضاد است.

قضیه ۲

اگر V یک فضایی با بعد متناهی باشد، آنگاه هر دو مجموعه پایه برای این فضا تعداد برابری اعضا دارند.

فرض کنید V_1 و V_2 با تعداد اعضای n_1 و n_2 باشند. آنگاه طبق قضیه ۱ داریم

$$n_1 \leq n_2 \ , \ n_2 \leq n_1$$

$$\implies n_1 = n_2$$

مثال ۳

بعد و پایه استاندارد را برای هرمورد مشخص کنید.

(آ) $\mathbb{F}^n$

(ب) P_n

(ج) $M_{m,n}$

(د) all polynomials ،P.

(ه) all functions ،F.

(و) all continuous functions ،C.

(آ) پایه استاندراد برابر است با

$$e_۱, \dots, e_n$$

و بعد آن هم برابر با تعداد آن‌ها n است.

(ب) پایه استاندارد برابر است با

$$۱, x, x^۲, \dots, x^n$$

و بعد برابر با تعداد آن‌ها $n + ۱$ است.

(ج) پایه استاندارد برای آن‌ها برابر است با

$$E_{۱۱}, \dots, E_{mn}$$

که هرکدام از آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[E_{mn}]_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = m, j = n \\ ۰ & \text{OW} \end{cases}$$

بعد آن برابر با mn است.

(د) این فضا با بعد نامتناهی می‌باشد و پایه‌های آن برابر است با

$$۱, x, \dots$$

(ه) این مورد بعد نامتناهی دارد و یکی از پایه‌های آن برابر است با

$$e^{jw} \ , \ w \in \mathbb{R}$$

(و) مانند مورد قبلی.

قضیه ۳

فرض کنید که مجموعه $S = \{x_۱, \dots, x_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی باشد که u در span آن‌ها قرار نداشته باشد. آنگاه مجموعه $\{x_۱, \dots, x_n, u\}$ هم یک مجموعه مستقل خطی است.

فرض کنید اینطور نباشد. یعنی ضرایب $\alpha_۱, \dots, \alpha_{n+۱}$ وجود دارند که همه آن‌ها صفر نیستند و به ازای آن‌ها داریم

$$\alpha_۱ x_۱ + \cdots + \alpha_{n+۱} u = ۰$$

حال اگر داشته باشیم $\alpha_{n+۱} = ۰$ آنگاه

$$\alpha_۱ x_۱ + \cdots + \alpha_n x_n = ۰ \implies \forall_i \alpha_i = ۰$$

که تناقض است. اگر داشته باشیم $\alpha_{n+۱} \neq ۰$ آنگاه

$$u = \frac{۱}{\alpha_{n+۱}} \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i$$

که باز هم خلاف فرض است. بنابراین چنین ضرایبی وجود ندارند.

قضیه ۴

فرض کنید W زیرفضایی از V باشد بنابراین هر زیرمجموعه مستقل خطی از W بخشی از یک پایه برای W می‌باشد.

در ابتدا فرض کنید که این مجموعه مستقل خطی X را بنامیم. اگر این مجموعه W را به طور کامل span کند حکم ثابت شده است. در غیر اینصورت یک عضو از W که در این span قرار ندارد را به آن اضافه می‌کنیم. این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که W span شود. دقت کنید که طبق قضیه ۳ استقلال خطی مجموعه هیچگاه دستخوش تغییر نمی‌شود بنابراین طبق قضیه ۱ تعداد اعضا این مجموعه همواره کوچکتر یا مساوی $\dim(W)$ است.

قضیه ۵

فرض کنید W یک زیرفضای سره از V با بعد متناهی باشد. آنگاه داریم $\dim(W) < \dim(V)$.

پایه W را در نظر بگیرید. طبق صورت سوال می‌دانیم حداقل یک عضو u در V وجود دارد که توسط پایه W ساخته نمی‌شود. فرض کنید این پایه $S = \{x_۱, \ldots, x_n\}$ باشد که داریم $n = \dim(W)$. بنابراین مجموعه زیر خود مستقل خطی است.

$$\{x_۱, \ldots, x_n, u\}$$

که تعداد آن‌ها $\dim(W) + ۱$ است و طبق قضیه ۱ داریم

$$\begin{aligned} &\dim(W) + ۱ \leq \dim(V) \\ \implies\ &\dim(W) < \dim(V) \end{aligned}$$

قضیه ۶

فرض کنید W_1, W_2 دو زیرفضا باشند. ثابت کنید که داریم

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$$

فرض کنید که $\{u_1, \ldots u_k\}$ پایه‌ای برای $W_1 \cap W_2$ باشد. با توجه به اینکه داریم

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \ , \ W_1 \cap W_2 \subseteq W_2$$

انگاه این مجموعه را می‌توان به صورت $\{u_1, \ldots, u_k, x_1, \ldots, x_m\}$ گسترش داد که که W_1 و به صورت $\{u_1, \ldots, u_k, y_1, \ldots, y_n\}$ گسترش داد که W_2 را span کند. حال دقت کنید که $\{u_1, \ldots, u_k, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ مستقل خطی می‌باشد. اگر اینطور نباشد بعد $W_1 \cap W_2$ از k بیشتر خواهد شد. حال نشان اگر نشان دهیم که $\{u_1, \ldots, u_k, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ که فضای $W_1 + W_2$ را span می‌کند.

$$x \in W_1 + W_2 \implies x = x_1 + x_2 \ , \ x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$$

$$x_1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i \ , \ x_2 = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$$

$$x = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \gamma_i) u_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$$

پس داریم

$$\dim(W_1) = k + m, \dim(W_2) = k + n, \dim(W_1 \cap W_2) = k, \dim(W_1 + W_2) = k + m + n$$

مثال ۴

بردار $۳x^۲ + x - ۴$ را بر روی پایه‌های $۱, x, x^۲$ تصویر کنید.

داریم

$$\begin{bmatrix} ۴ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

قضیه ۷

فرض کنید که $S = \{v_۱, \dots, v_k\}$ یک مجموعه مستقل آفین باشد. و p در span آفین این مجموعه باشد. آنگاه p به صورت یکتا توسط S ساخته می‌شود.

می‌دانیم که مجموعه $\{[v_۱, ۱], \dots, [v_k, ۱]\}$ مستقل خطی می‌باشد. حال می‌خواهیم از S بردار p را بسازیم. حال فرض کنید که به دور روش مختلف می‌توان آن را ساخت.

$$\sum_{i=۱}^{k} \alpha_i v_i = p \ , \ \sum_{i=۱}^{k} \alpha_۱ = ۱ \implies \sum_{i=۱}^{k} \alpha_i [v_i, ۱] = [p, ۱]$$

$$\sum_{i=۱}^{k} \beta_i v_i = p \ , \ \sum_{i=۱}^{k} \beta_۱ = ۱ \implies \sum_{i=۱}^{k} \beta_i [v_i, ۱] = [p, ۱]$$

از تفاضل این دو داریم

$$\implies \sum_{i=۱}^{k} (\alpha_i - \beta_i)[v_i, ۱] = ۰$$

با توجه به استقلال خطی داریم

$$\forall_i \ \alpha_i = \beta_i$$

پس یکتا می‌باشد.

مثال ۵

بردار $p = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۳ \end{bmatrix}$ را بر اساس ترکیب آفین $a = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $c = \begin{bmatrix} ۹ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بنویسید.

باید ضرایب زیر را پیدا کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۹ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۷ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

داریم

$$x_۱ = \frac{۵}{۱۲}\ ,\ x_۲ = \frac{۱}{۳}\ ,\ x_۳ = \frac{۱}{۴}$$