به نام خداوند بخشنده مهربان

# جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاییز ۱۴۰۲

## قضایای اسلاید independence

**قضیه ۱**

هر مجموعه برداری که بردار صفر را در خود داشته باشد، وابسته خطی است.

مجموعه‌ی بردارهای $\{v_۱, v_۲, ..., v_n\}$ را در نظرگرفته و اگر مجموعه‌ی اسکالر $\{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$ وجود داشته باشد که حداقل یکی از اعضای آن ناصفر باشد و معادله‌ی زیر برقرار باشد آن‌گاه بردارها وابسته‌ی خطی هستند.

$$a_۱v_۱ + a_۲v_۲ + ... + a_nv_n = ۰$$

حال اگر $v_۱ = ۰$ داریم:

$$(۱)v_۱ + (۰)v_۲ + ... + (۰)v_n = ۰$$

پس وابسته‌ی خطی اند.

**قضیه ۲**

مجموعه‌ای نمایه‌دار از بردارها به صورت $S = \{v_1, ..., v_n\}$ که شامل دو یا بیش از دو بردار است، وابسته خطی است اگر و تنها اگر حداقل یکی از بردارهای موجود در $S$ ترکیبی خطی از بردارهای دیگر باشد. در واقع، اگر $S$ وابسته خطی باشد و $v_1 \neq 0$ آنگاه وجود دارد بردار $v_j$ با $j > 1$ که ترکیبی خطی از بردارهای $v_1, ..., v_{j-1}$ باشد.

برای بردار $v_j$ داریم:

$$v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i v_i$$

حال اگر از دو طرف $v_j$ را کم کنیم و بردارهای دیگر را نیز با ضریب $0$ در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{gathered}(-1)v_j + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i v_i + (0)v_{j+1} + ... + (0)v_n = 0 \\ \Rightarrow (-1)v_j + \underbrace{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{j-1} v_{j-1}}_{v_j} + \underbrace{\alpha_j}_{0} v_j + ... + \underbrace{\alpha_n}_{0} v_n = 0\end{gathered}$$

پس $S$ وابسته‌ی خطی است.

حال طرف دیگر قضیه را ثابت می‌کنیم. اگر $S$ مجموعه‌ی وابسته‌ی خطی باشد و $v_1 \neq 0$ آنگاه $v_j$ هایی پیدا می‌شود که ترکیبی خطی از $v_1 ... v_{j-1}$ باشد:
در واقع اگر $v_1 = 0$ بود بدیهتا این ترکیب خطی پیدا می‌شد. پس اگر $v_1 \neq 0$:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n = 0, \ \exists c_i \neq 0$$

اگر $j$ بزرگترین نمایه‌ای باشد که به ازای آن $c_j \neq 0$ و اگر $j = 1$ آنگاه باید داشته باشیم $c_1 v_1 = 0$ که ممکن نیست چرا که $v_1 \neq 0$ پس $j > 1$ و:

$$\begin{gathered}c_1 v_1 + ... + c_j v_j + (0)v_{j+1} + ... + (0)v_n = 0 \\ c_j v_j = -c_1 v_1 - ... - c_{j-1} v_{j-1} \\ v_j = (-\frac{c_1}{c_j})v_1 + ... + (-\frac{c_{j-1}}{j})v_{j-1}\end{gathered}$$

پس ترکیب خطی را پیدا کردیم.

قضیه ۳

اگر $A$ یک ماتریس $N \times M$ باشد که که $N$ تعداد معادلات و $M$ تعداد متغیرها باشد و $Ax = ۰$ آنگاه:
- اگر $M > N$ ، هر مجموعه‌ی $M$ عضوی از بردارهای $R^n$ حتما وابسته‌ی خطی هستند.
- اگر $M \leq N$ ، مجموعه‌ای $M$ عضوی از بردارهای $R^n$ می‌تواند مستقل خطی باشد.

بخش اول:
اگر $V = \{v_۱, v_۲, ..., v_m\}$ مجموعه‌ای از بردارهایی در $R^n$ باشد آنگاه در معادله‌ی $Ax = ۰$ ، $N$ معادله و $M$ مجهول داریم، پس تعداد متغیرها بیشتر از معادلات است و باید یک متغیر آزاد داشته باشیم. در نتیجه $Ax = ۰$ جوابی غیرجزئی دارد و ستون‌های $A$ وابسته‌ی خطی هستند.

بخش دوم:

اگر $V = \{v_۱, v_۲, ..., v_m\}$ مجموعه‌ای از بردارهایی در $R^n$ باشد، باید نشان دهیم لزوما جوابی غیرجزئی برای معادله‌ی پایین وجود ندارد.

$$c_۱v_۱ + c_۲v_۲ + ... + c_mv_m = ۰$$

از آنجایی که $V$ حداکثر $N$ بردار در $R^n$ را دارد پس بعد $Span(V)$ نهایتا $N$ است. پس اگر هر بردار $v_i \in V$ فقط عضو $i$ آن ناصفر باشد پس فقط جواب جزئی داریم و وابسته‌ی خطی نیست.

**قضیه ۴**

فرض کنید $x$ یک ترکیب خطی از بردارهای مستقل خطی $\{v_۱, v_۲, ..., v_n\}$ باشد:
$x = \beta_۱ v_۱ + ... + \beta_n v_n$
آنگاه ضرایب $\beta_۱, ..., \beta_n$ یکتا هستند.

برهان خلف: فرض می‌کنیم یکتا نباشند:

$$x = \beta_۱ v_۱ + \beta_۲ v_۲ + ... + \beta_n v_n$$
$$x = \alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲ + ... + \alpha_n v_n$$

از تفریق دو معادله داریم:

$$۰ = (\beta_۱ - \alpha_۱)v_۱ + (\beta_۲ - \alpha_۲)v_۲ + ... + (\beta_n - \alpha_n)v_n$$

که برای برقرای تساوی تمامی $\beta_i - \alpha_i$ ها باید صفر شوند. درنتیجه ضرایب یکتا هستند.

**قضیه ۵**

نقطه‌ی $y$ در $R^n$ یک ترکیب افاین از $v_1, ..., v_p$ در $R^n$ است، اگر و تنها اگر $y - v_i$ یک ترکیب خطی از نقاط $v_1 - v_i, v_2 - v_i, ..., v_p - v_i$ باشد.

طرف اول:
اگر $y - v_1$ ترکیب خطی $v_2 - v_1, ..., v_p - v_1$ باشد، وزن‌های $c_2, ..., c_p$ وجود دارند که:

$$\begin{aligned} & y - v_1 = c_2(v_2 - v_1) + ... + c_p(v_p - v_1) \\ & \Rightarrow y = (1 - c_2 - ... - c_p)v_1 + ... + c_p v_p \end{aligned}$$

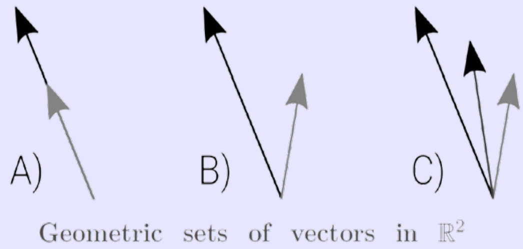
اگر جمع وزن ها یک باشد، آنگاه $y$ یک ترکیب آفاین به صورت $y = c_1 v_1 + ... + c_p v_p$ است و $\sum_{i=1} c_i = 1$ .

طرف دوم:
حال فرض می‌کنیم $y$ یک ترکیب افاین از $v_1, ..., v_p$ باشد و وجود دارند ضرایب $c_1, ..., c_p$ که $y = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_p v_p$ و $\sum_{i=1} c_i = 1$. حال برای $y - v_1$ داریم:

$$\begin{aligned} y - v_1 &= (c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_p v_p) - v_1 = c_1 v_1 - v_1 + c_2 v_2 + ... + c_p v_p = (c_1 - 1)v_1 + c_2 v_2 + ... + c_p v_p \\ &= c_2(v_2 - v_1) + ... + c_p(v_p - v_1) + (1 - c_1 - c_2 - ... - c_p)v_1 = c_2(v_2 - v_1) + ... + c_p(v_p - v_1) \end{aligned}$$

مثال ۱

در هر یک از مجموعه بردارهای زیر مشخص کنید کدام مستقل یا وابسته‌ی خطی هستند.




a. این دو بردار یک خط را در صفحه $span$ می‌کنند پس وابسته‌ی خطی هستند.

b. این دو بردار تمام صفحه را $span$ می‌کنند، پس مستقل خطی هستند.

c. بعد فضای $span$ شده کمتر از تعداد بردارها است پس وابسته‌ی خطی هستند.

**مثال ۲**

برای هر یک از مجموعه بردار زیر استقلال خطی را بررسی کنید.

$$\textbf{a.}\quad \begin{bmatrix}۱\\۷\\۶\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۲\\۰\\۹\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۳\\۱\\۵\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۴\\۱\\۸\end{bmatrix}$$

$$\textbf{b.}\quad \begin{bmatrix}۲\\۳\\۵\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱\\۱\\۸\end{bmatrix}$$

$$\textbf{c.}\quad \begin{bmatrix}-۲\\۴\\۶\\۱۰\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۳\\-۶\\-۹\\۱۵\end{bmatrix}$$

$$\textbf{a.}\quad ۳\begin{bmatrix}۱\\۷\\۶\end{bmatrix} - ۳۱\begin{bmatrix}۲\\۰\\۹\end{bmatrix} - ۱۴۳\begin{bmatrix}۳\\۱\\۵\end{bmatrix} + ۱۲۲\begin{bmatrix}۴\\۱\\۸\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\end{bmatrix}$$

پس وابسته‌ی خطی‌اند.

$$\textbf{b.}\quad \alpha\begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\end{bmatrix} + c_۱\begin{bmatrix}۲\\۳\\۵\end{bmatrix} + c_۲\begin{bmatrix}۱\\۱\\۸\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\end{bmatrix}$$

چون $\alpha$ هر ضریب غیر صفری می‌تواند باشد، پس وابسته‌ی خطی‌اند

$$\textbf{c.}\quad c_۱\begin{bmatrix}-۲\\۴\\۶\\۱۰\end{bmatrix} + c_۲\begin{bmatrix}۳\\-۶\\-۹\\۱۵\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\\۰\end{bmatrix} \Rightarrow c_۱ = ۰, c_۲ = \frac{۲}{۳}c_۱$$

پس مستقل خطی‌اند

**مثال ۳**

برای هر یک از مجموعه توابع زیر استقلال و وابستگی خطی را تعیین کنید.

$$۱. f(t) = ۲sin^۲t,\ g(t) = ۱ - cos^۲t$$
$$۲. \{sin^۲x, cos^۲x, cos(۲x)\} \subset F$$

۱. طبق معادله‌ی زیر توابع

$f(t)$ و $g(t)$ ضریبی از یکدیگرند پس وابسته‌ی خطی اند.

$$f(t) = ۲sin^۲(t) = ۲(۱ - cos^۲(t)) = ۲g(t)$$

۲. به مانند قسمت قبل:

$$cos(۲x) = cos^۲(x) - sin^۲(x) \Rightarrow (+۱)cos(۲x) + (-۱)cos^۲(x) + (+۱)sin^۲(x) = ۰$$

پس با ضرایبی غیر صفر این معادله برقرار شد و وابسته‌ی خطی هستند.

مثال ۴

آیا توابع $x^۲$ ,$۱+x$ ,$۱-x$ مستقل خطی‌اند؟

وجود ضرایب ناصفر $a, b, c$ را در معادله‌ی زیر بررسی می‌کنیم.

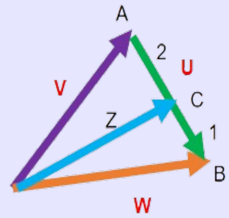
$$
\begin{aligned}
& a(۱-x)+b(۱+x)+c(x^۲)=۰ \\
\Rightarrow \quad & a+b+(-a+b)x+cx^۲=۰
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
a+b&=۰\\
-a+b&=۰\\
c&=۰
\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow a=b=c=۰
$$

پس مستقل خطی هستند.

مثال ۵

در تصویر زیر $A=(a,b)$ و $B=(c,d)$ . اگر بردار $\vec{z}$ ترکیبی افاین از بردارهای $\vec{w}$ و $\vec{v}$ باشد، آنگاه $C$ را بر حسب مختصات $A$ و $B$ بنویسید.




$$\vec{u} = \vec{AB} = \vec{w} - \vec{v} = (c-a, d-b)$$
$$\vec{z} = \vec{v} + \tfrac{۲}{۳}(w-v) = \tfrac{۱}{۳}v + \tfrac{۲}{۳}w$$
$$\Rightarrow C = \tfrac{۱}{۳}A + \tfrac{۲}{۳}B = [\tfrac{۱}{۳}a + \tfrac{۲}{۳}c, \tfrac{۱}{۳}b + \tfrac{۲}{۳}d]$$

مثال ۶

یک معادله‌ی برداری و معادلات پارامتری برای صفحه‌ای در $R^4$ که از $(-17, 6, 29, 0)$، $(-13, 3, 25, -2)$ و $(-15, 6, 25, -1)$ می‌گذرد بنویسید.

اگر $P_1 = (-17, 6, 29, 0)$، $P_2 = (-13, 3, 25, -2)$، $P_3 = (-15, 6, 25, -1)$. داریم:

$$\begin{aligned} \vec{P_1P_2} &= P_2 - P_1 = (-13 + 17, 3 - 6, 25 - 29, -2 - 0) = (4, -3, -4, -2), \\ \vec{P_1P_3} &= P_3 - P_1 = (-15 + 17, 6 - 6, 25 - 29, -1 - 0) = (2, 0, -4, -1). \end{aligned}$$

نمایش پارامتریک صفحه:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t,s) &= \vec{P_1} + t\vec{P_1P_2} + s\vec{P_1P_3} \\ &= (-17, 6, 29, 0) + t(4, -3, -4, -2) + s(2, 0, -4, -1). \end{aligned}$$

معادلات پارامتریک:

$$\begin{cases} x = -17 + 4t + 2s, \\ y = 6 - 3t, \\ z = 29 - 4t - 4s, \\ w = -2t - s. \end{cases}$$

معادله‌ی برداری در $R^4$ به شرح زیر است:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -17 + 4t + 2s \\ 6 - 3t \\ 29 - 4t - 4s \\ -2t - s \end{bmatrix}.$$

مثال ۷

فرض کنید $\mathbf{v}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۷ \end{bmatrix}$، $\mathbf{v}_۲ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۷ \\ ۶/۵ \end{bmatrix}$، $\mathbf{v}_۳ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \\ ۷ \end{bmatrix}$، و $\mathbf{v}_۴ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱۴ \\ ۶ \end{bmatrix}$ و همچنین فرض کنید $S = \{\mathbf{v}_۱, \dots, \mathbf{v}_۴\}$. آیا مجموعه $S$ وابستگی افاین دارد؟

مجموعه‌ی $\{v_۲ - v_۱, v_۳ - v_۱, v_۴ - v_۱\}$ را بررسی می‌کنیم. اگر این مجموعه مستقل خطی باشند، $\{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴\}$ مستقل افاین است.

$$M = \begin{bmatrix} ۲ - ۱ & ۰ - ۱ & ۰ - ۱ \\ ۷ - ۳ & ۴ - ۳ & ۱۴ - ۳ \\ ۶/۵ - ۷ & ۷ - ۷ & ۶ - ۷ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ \\ ۴ & ۱ & ۱۱ \\ -۰/۵ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_۲ = R_۲ - ۴R_۱, R_۳ = R_۳ + ۰/۵R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۵ & ۱۵ \\ ۰ & -۰/۵ & -۱/۵ \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_۳ + ۰/۱R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس رنک ماتریس ۲ است و وابسته‌ی افاین هستند.