به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاییز ۱۴۰۲

قضایای اسلاید ۱۴

قضیه ۱

یک ماتریس وارون چپ دارد اگر و تنها اگر ستون‌هایش مستقل خطی باشند.

فرض کنید A یک ماتریس m×n باشد که وارون چپ دارد. یعنی، ماتریسی به نام B وجود دارد به طوری که: $BA = I_n$ حال می‌خواهیم نشان دهیم که ستون‌ها مستقل خطی هستند که این بدان معنی است که $Ax = 0$ فقط جواب بدیهی $x = 0$ دارد و می‌دانیم اگر ماتریسی وارون چپ داشته باشد آنگاه در معادله‌ی $Ax = B$ یا جواب ندارد یا $x = BA$. پس اگر در معادله‌ی $Ax = 0$ یک B از چپ ضرب کنیم داریم $BAx = 0$ و چون $BA = I$ پس $x = 0$ و از آنجایی که وارون چپ را داشتیم این at most solution ما است و این بیشترین جوابی است که می‌توانیم داشته باشیم همچنین می‌دانستیم که این جواب بدیهی حتما وجود دارد پس ستون ها مستقل خطی‌اند.

همچنین با برهان خلف نیز می‌توانستیم این اثبات را انجام دهیم: فرض کنید برای اثبات خلف، ستون‌های A خطی مستقل نیستند. این بدان معناست که بردار غیرصفری $\mathbf{x} \in R^n$ وجود دارد به طوری که:

$$A\mathbf{x} = 0$$

چون B وارون چپ A است، می‌توانیم هر دو طرف معادله $A\mathbf{x} = 0$ را در B ضرب کنیم:

$$B(A\mathbf{x}) = B0$$

با استفاده از ویژگی جابجایی ضرب ماتریس‌ها و این که $BA = I_n$:

$$(BA)\mathbf{x} = B0$$

$$I_n\mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{x} = 0$$

این نتیجه با فرض ما که $\mathbf{x}$ یک بردار غیرصفر است تناقض دارد. بنابراین، فرض ما باید نادرست باشد و ستون‌های A باید خطی مستقل باشند.

طرف دیگر اثبات:

فرض کنید ماتریس $A_{m\times n}$ ستون‌های $A_1, A_2, ..., A_n$ دارد که در F^m مستقل خطی هستند و بنابراین پایه‌ای برای فضای ستونی $\mathcal{R}(A)$ در F^m تشکیل می‌دهند به طوری که $\dim(\mathcal{R}(A)) = n$. اگر $y_1 = A_1, y_2 = A_2, ..., y_n = A_n$ باشد. بنابراین $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ یک پایه برای $\mathcal{R}(A)$ است. اگر $m = n$، آنگاه A یک ماتریس مربعی است که رتبه ستونی کامل دارد و بنابراین وارون‌پذیر است. فرض کنید $n < m$ و بگذارید $r = m-n > 0$ باشد. بنابراین $\mathcal{R}(A)$ یک زیرفضا از F^m است که توسط بردارهای ستونی $y_1, y_2, ..., y_n$ از A اسپن شده است. بنابراین می‌توانیم عنصری به نام y_{n+1} در $F^m - \mathcal{R}(A)$ انتخاب کنیم. از آنجایی که y_{n+1} در $\mathcal{R}(A)$ نیست، پس ترکیبی خطی از y_iها نیست و بنابراین مجموعه $\{y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}\}$ در F^m خطی مستقل می‌شود. بگذارید U_1 زیرفضای F^m باشد که توسط $\{y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}\}$ اسپن شده است. بنابراین از آنجایی که $\{y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}\}$ خطی مستقل هستند، $\dim(U_1) = n + 1$ است. اگر $m = n + 1$، آنگاه $U_1 = F^m$ و اگر $m < n + 1$، می‌توانیم عنصر دیگر y_{n+2} در $F^m - U_1$ انتخاب کنیم، سپس $y_{n+2} \notin U_1$ است، به طوری که y_{n+2} ترکیبی خطی از $y_1, y_2, ..., y_{n+1}$ نیست و بنابراین مجموعه $\{y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}, y_{n+2}\}$ در F^m مستقل خطی می‌شود. به همین ترتیب، با انجام این فرآیند r بار، r بردار $y_{n+1}, y_{n+2}, ..., y_m$ داریم به طوری که مجموعه $B = \{y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}, ..., y_m\}$ در F^m مستقل خطی است و بنابراین یک پایه مرتب برای F^m است. اگر $A[B]$ ماتریسی با ستون‌های $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}, ..., y_m$ باشد، آنگاه $A[B]$ یک ماتریس $m \times m$ است که اولین n ستون آن ستون‌های A هستند. از سوی دیگر، از آنجایی که ستون‌های $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}, ..., y_m$ مستقل خطی هستند، داریم که $A[B]$ وارون‌پذیر است و بگذارید $A[B]^{-1}$ وارون آن باشد. سپس $A[B]^{-1}$ یک ماتریس $m \times m$ روی همان میدان F است به طوری که:

$$A[B]^{-1}A[B] = I_m$$

و

$$A[B]A[B]^{-1} = I_m$$

به طوری که برای هر $1 \leq i \leq m$ و به ویژه برای $1 \leq i \leq n$، $f_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, 0)$ است: که یک ترتیب از ۰ها و ۱ در جایگاه i است. به عبارت دیگر، f_i ستون iام ماتریس همانی I_m است. اکنون یک ماتریس $n \times m$ به نام A_B تعریف می‌کنیم، به طوری که ردیف‌های آن اولین n ردیف از $A[B]^{-1}$ هستند. برای هر $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$، اگر x_{ij} یک عنصر از ماتریس ضربی $A_B A$ باشد که در ردیف iام و ستون jام قرار دارد، آنگاه:

$$x_{ij} = \text{ضرب داخلی ردیف } i^{th}\ A_B \text{ در ستون } j^{th} \text{ ماتریس } \mathrm{A}$$

$$= \text{ضرب داخلی ردیف } i^{th}\ A[B]^{-1} \text{ در ستون } j^{th} \text{ ماتریس } A[B]$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

(زیرا $A[B]^{-1}A[B] = I_m$)
بنابراین

$$A_B A = I_n$$

و بنابراین

$$A_B$$

یک وارون چپ برای A است. بنابراین A چپ‌وارون‌پذیر است.

قضیه ۲

یک ماتریس وارون راست دارد اگر و تنها اگر سطرهایش مستقل خطی باشند.

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد که راست‌وارون‌پذیر است. یعنی، ماتریسی به نام B وجود دارد به طوری که:

$$AB = I_m$$

که در آن I_m ماتریس همانی $m \times m$ است.
حال فرض کنید برای برهان خلف، سطرهای A خطی مستقل نیستند. این بدان معناست که بردار غیرصفر $\mathbf{x} \in R^m$ وجود دارد به طوری که:

$$\mathbf{x}A = 0$$

چون B وارون راست A است، می‌توانیم هر دو طرف معادله $\mathbf{x}A = 0$ را در B ضرب کنیم:

$$(\mathbf{x}A)B = 0B$$

با استفاده از ویژگی جابجایی ضرب ماتریس‌ها و این که $AB = I_m$:

$$\mathbf{x}(AB) = 0$$

$$\mathbf{x}I_m = 0$$

$$\mathbf{x} = 0$$

این نتیجه با فرض ما که $\mathbf{x}$ یک بردار غیرصفر است تناقض دارد. بنابراین، فرض ما باید نادرست باشد و سطرهای A باید خطی مستقل باشند.
طرف دیگر اثبات:

فرض کنید ماتریس $A_{m\times n}$ سطرهای $A_1, A_2, ..., A_m$ دارد که در F^n خطی مستقل هستند و بنابراین پایه‌ای برای فضای سطری $\mathcal{R}(A)$ در F^n تشکیل می‌دهند به طوری که $\dim(\mathcal{R}(A)) = m$. بگذارید $y_1 = A_1, y_2 = A_2, ..., y_m = A_m$ باشد. بنابراین $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ یک پایه برای $\mathcal{R}(A)$ است. اگر $m = n$، آنگاه A یک ماتریس مربعی است که رتبه سطری کامل دارد و بنابراین وارون‌پذیر است. فرض کنید $m < n$ و بگذارید $r = n-m > 0$ باشد. بنابراین $\mathcal{R}(A)$ یک زیرفضا از F^n است که توسط بردارهای سطری $y_1, y_2, ..., y_m$ از A اسپن شده است. بنابراین می‌توانیم عنصری به نام y_{m+1} در $F^n - \mathcal{R}(A)$ انتخاب کنیم. از آنجایی که y_{m+1} در $\mathcal{R}(A)$ نیست، پس ترکیبی خطی از y_iها نیست و بنابراین مجموعه $\{y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}\}$ در F^n خطی مستقل می‌شود. بگذارید U_1 زیرفضای F^n باشد که توسط $\{y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}\}$ اسپن شده است. بنابراین از آنجایی که $\{y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}\}$ خطی مستقل هستند، $\dim(U_1) = m+1$ است. اگر $n = m+1$، آنگاه $U_1 = F^n$ و اگر $n > m+1$، می‌توانیم عنصر دیگری y_{m+2} در $F^n - U_1$ انتخاب کنیم، سپس $y_{m+2} \notin U_1$ است، به طوری که y_{m+2} ترکیبی خطی از $y_1, y_2, ..., y_{m+1}$ نیست و بنابراین مجموعه $\{y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}, y_{m+2}\}$ در F^n خطی مستقل می‌شود. به همین ترتیب، با انجام این فرآیند r بار، r بردار $y_{m+1}, y_{m+2}, ..., y_n$ در F^n داریم به طوری که مجموعه $B = \{y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}, ..., y_n\}$ در F^n خطی مستقل است و بنابراین یک پایه مرتب برای F^n است. اگر $A[B]$ ماتریسی با سطرهای $y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}, ..., y_n$ باشد، آنگاه $A[B]$ یک ماتریس $n \times n$ است که اولین m سطر آن سطرهای A هستند. از سوی دیگر، از آنجایی که سطرهای $y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}, ..., y_n$ خطی مستقل هستند، داریم که $A[B]$ وارون‌پذیر است و بگذارید $A[B]^{-1}$ وارون آن باشد. سپس $[A[B]^{-1}$ یک ماتریس $n \times n$ روی همان میدان F است به طوری که:

$$A[B]^{-1}A[B] = I_n$$

و

$$A[B]A[B]^{-1} = I_n$$

به طوری که برای همه $1 \leq i \leq n$ و به ویژه برای $1 \leq i \leq m$، $f_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ است:که یک ترتیب از ۰ها و ۱ در جایگاه i است. به عبارت دیگر، f_i سطر iام ماتریس همانی I_n است. اکنون یک ماتریس $m \times n$ به نام A_B تعریف می‌کنیم، به طوری که سطرهای آن اولین m سطر از $A[B]^{-1}$ هستند. برای هر $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq m$، اگر x_{ij} یک عنصر از ماتریس ضربی AA_B باشد که در سطر iام و ستون jام قرار دارد، آنگاه:

$x_{ij} =$ ضرب داخلی ستون i^{th} A_B در سطر j^{th} ماتریس A

$=$ ضرب داخلی ستون i^{th} $A[B]^{-1}$ در سطر j^{th} ماتریس $A[B]$

$$= \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

بنابراین

$$AA_B = I_m$$

و بنابراین

$$A_B$$

یک وارون راست برای A است. بنابراین A راست‌وارون‌پذیر است.

مثال ۱

چرا برای استفاده از وارون راست نیازی به بررسی پایداری نیست؟ (پایداری: اینکه آیا یک مجموعه معادلات خطی دارای راه‌حل است یا خیر)

وارون راست فقط برای ماتریس‌های مربعی و پهن تعریف می‌شود، یعنی ماتریس‌هایی که تعداد ستون‌هایشان بیشتر یا مساوی تعداد سطرهایشان است. این تعریف به این معناست که اگر A یک ماتریس مربعی یا پهن باشد و وارون راست داشته باشد، می‌توانیم با استفاده از این وارون راست، هر بردار b را به یک راه‌حل معادله‌ی $Ax = b$ نگاشت کنیم. در این حالت، نیازی به بررسی پایداری نیست چون وجود وارون راست تضمین می‌کند که چنین راه‌حلی همیشه وجود دارد. این خاصیت به این دلیل است که وارون راست B برای هر b راه حل منحصر به فرد Bb تولید می‌کند که معادله‌ی $Ax = b$ را ارضا می‌کند.

مثال ۲

اگر ستون های A مستقل خطی باشند:

$$\text{nullity(A)} = ?$$
$$\text{colrank(A)} = ?$$

اگر ستون های ماتریس A مستقل خطی باشند پس ماتریس A_{m*n} ماتریسی بلند است و ستونی غیر پیوت ندارد، پس

$$\text{nullity(A)} = \text{number} \quad \text{of} \quad \text{pivot} \quad \text{columns} = m - n$$
$$\text{colrank(A)} = \text{number} \quad \text{of} \quad \text{independent} \quad \text{columns} = n$$

مثال ۳

$$\text{nullity(A)} = ? \quad \text{colrank(A)} = ?$$

$$\text{A}= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -2x_3 - x_4 \\ -x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$nullity(A) = 2, colRank(A) = 2$$

مثال ۴

بعد فضا های $NullSpace$ و $ColumnSpace$ را بیابید

$$\begin{bmatrix} -۳ & ۶ & -۱ & ۱ & -۷ \\ ۱ & -۲ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۲ & -۴ & ۵ & ۸ & -۴ \end{bmatrix}$$

(row reduce the Augmented Matrix [A 0] to echelon form)

$$\begin{bmatrix} A & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & ۶ & -۱ & ۱ & -۷ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۲ & ۳ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۴ & ۵ & ۸ & -۴ & ۰ \end{bmatrix} \longrightarrow^{RREF} = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۰ & -۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \longrightarrow x_۱ = ۲x_۲ + x_۴ - ۳x_۵, x_۳ = -۲x_۴ + ۲x_۵$$

number of basic variables = colRank(A) = ۲

number of free variables = nullity(A) = ۳

مثال ۵

$$\text{Nullspace(A)} = ?$$

$$\text{A}= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -2x_3 - x_4 \\ -x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$nullity(A) = 2, colRank(A) = 2 \qquad \text{Nullspace(A)}=\{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

قضیه ۳

در یک ماتریس مربعی وارون‌های راست و چپ برابرند.

ماتریس A را در نظر بگیرید که B وارون راست آن و C وارون چپ آن است پس داریم:

$$BA = I => BAC = (BA)C = IC = C$$

در اینجا از خاصیت جابه‌جایی ماتریس‌ها استفاده شده.

$$BAC = B(AC) = BI = B \Rightarrow BAC = C = B$$

قضیه ۴

معکوس یک ماتریس مربعی یکتاست.

اگر B و C هر دو وارون‌های ماتریس A باشند، آنگاه $B = C$ است. حال فرض کنید B و C هر دو وارون‌های ماتریس A باشند:

$$I = AB$$

$$I = CA$$

حالا با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها و خاصیت ماتریس همانی داریم:

$$CI = C(AB)$$

$$IB = B(CA)$$

با توجه به اینکه $I = CA$:

$$CI = IB \Rightarrow C = B$$

قضیه ۵

یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر ستون‌هایش مستقل خطی باشند.

برای اثبات طرف اول این قضیه داریم:

$$\text{ستون‌های } A \text{ مستقل خطی هستند} \implies A^{-1} \text{ وجود دارد}$$

می‌دانیم گزاره‌ی "ستون‌های A مستقل خطی هستند" معادل است با اینکه $Ax = 0$ در صورتی که $x = 0$ باشد که این از تعریف استقلال خطی ناشی می‌شود که داریم:

$$\vec{v_1}, ..., \vec{v_n} \text{ مستقل خطی هستند پس } \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i \text{ فقط می‌تواند } 0 \text{ باشد درصورتی که } x_i = 0$$

با دیدگاه ستونی ضرب ماتریس‌ها داریم $A\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i$ که $\vec{v_i}$ ستون i^{th} ماتریس A است. در نتیجه، $Ax = 0$ فقط درصورتی که همه‌ی $x_i = 0$. بنابراین، می‌توانیم آنچه را که می‌خواهیم اثبات کنیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$A^{-1} exists \Rightarrow (Ax = 0, x = 0)$$

برای اثبات، فرض می‌کنیم که A وارون‌پذیر است. بردار $\vec{v}$ را درنظر بگیرید که $A\vec{v} = \vec{0}$:

$$A\vec{v} = \vec{0}$$
$$A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}\vec{0}$$
$$I\vec{v} = \vec{0}$$
$$\vec{v} = \vec{0}$$

اثبات طرف دیگر:

$$A^{-1} \text{ وجود دارد} \implies \text{ستون‌های } A \text{ مستقل خطی هستند}$$

ابتدا می‌دانیم که با توجه به مستقل خطی بودن ستون‌های A، $A\vec{x} = \vec{b}$ برای هر $\vec{b}$ یک راه‌حل دارد. علت این مطلب هم این است که n بردار مستقل یک فضای برداری n بعدی را اسپن می‌کنند. بنابراین، می‌توانیم گزاره را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$A^{-1} \text{ وجود دارد } \Rightarrow (Ax = b \text{ یک جواب } x \text{ دارد})$$

حال فرض کنید که $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ستون‌های ماتریس همانی باشند. می‌خواهیم ببینیم آیا ماتریسی به نام M وجود دارد که وارون A باشد، یعنی از خواص زیر پیروی کند:

$$AM = MA = I$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

با استفاده از تعریف ضرب ماتریس–ماتریس به عنوان یک سری از ضرب ماتریس–بردار:

$$A \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{m}_1 & \vec{m}_2 & \cdots & \vec{m}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A\vec{m}_1 & A\vec{m}_2 & \cdots & A\vec{m}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

آنچه اکنون باید اثبات کنیم این است که بردارهایی $\{\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n\}$ وجود دارند به طوری که:

$$A\vec{m}_i = \vec{e}_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

وجود هر $\vec{m}_i$ از این واقعیت پیروی می‌کند که $A\vec{x} = \vec{b}$ همیشه یک راه‌حل دارد. بنابراین، می‌توانیم برای هر i $\vec{m}_i$ را حل کنیم و یک M بسازیم به طوری که $AM = I$.

قضیه ۶

$ColRank(A) = RowRank(A)$

در کل این برابر با رنک ماتریس است. ((rank(A))

فرض کنید A یک ماتریس $m * n$ باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که رنک ستونی ماتریس A (که با $rank(A)$ نشان داده می‌شود) برابر است با رنک سطری ماتریس A (که با $rank(A^T)$ نشان داده می‌شود).

۱. فرض کنید $C_1, C_2, ..., C_r$ پایه‌ای برای فضای ستونی ماتریس A باشند. پس هر ستون از A می‌تواند به صورت ترکیب خطی از این پایه‌ها نوشته شود.

۲. حالا اگر سطری از A^T را در نظر بگیریم، در واقع یک ستون از A است که به صورت ترکیب خطی از $C_1, C_2, ..., C_r$ بدست می‌آید. پس هر سطر از A^T نیز می‌تواند به صورت ترکیب خطی از سطرهای $C_1^T, C_2^T, ..., C_r^T$ نوشته شود.

۳. بنابراین، $C_1^T, C_2^T, ..., C_r^T$ پایه‌ای برای فضای سطری ماتریس A^T هستند. پس $rank(A^T) = r$.

۴. از آنجا که $r = rank(A)$ بود، پس $rank(A) = rank(A^T)$.

بنابراین، رنک سطری یک ماتریس برابر است با رنک ستونی آن.

قضیه ۷

اگر A و B ماتریس‌هایی وارون‌پذیر از مرتبه n باشند در آن صورت AB نیز ماتریسی وارون پذیر است و همچنین داریم که $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

در حالت کلی ثابت می‌کنیم که اگر A_1 تا A_n ماتریس‌هایی وارون‌پذیر باشند در آن صورت $A_1A_2...A_n$ وارون‌پذیر است و وارون آن برابر است با $A_n^{-1}...A_2^{-1}A_1^{-1}$.

برای اثبات این عبارت را یک بار از چپ و یکبار از راست در ماتریس $A_1A_2...A_n$ ضرب می‌کنیم و از I شدن حاصل هردو این ضرب‌ها نتیجه میگیریم که این عبارت هم وارون چپ و هم وارون راست ماتریس $A_1...A_n$ است. پس در نتیجه وارون آن است.

ضرب از سمت راست:

$$A_1A_2...A_n * A_n^{-1}...A_2^{-1}A_1^{-1} = A_1...A_{n-1}IA_{n-1}^{-1}...A_1^{-1} = A_1...A_{n-1}A_{n-1}^{-1}...A_1^{-1} = A_1...A_{n-2}IA_{n-2}^{-1}...A_1^{-1} = A_1...A_{n-2}A_{n-2}^{-1}...A_1^{-1} = ... = A_1A_1^{-1} = I$$

ضرب از سمت چپ:

$$A_n^{-1}...A_2^{-1}A_1^{-1}A_1A_2...A_n = A_n^{-1}...A_2^{-1}IA_2...A_n = A_n^{-1}...A_2^{-1}A_2...A_n = A_n^{-1}...A_3^{-1}IA_3...A_n = A_n^{-1}...A_3^{-1}A_3...A_n = ... = A_n^{-1}A^n = I$$

قضیه ۸

مجموعه جواب‌های K در هر سیستم $Ax = b$ که m معادله و n مجهول دارد دارای یک جواب $s \in R^n$ است که در معادله‌ی زیر صدق می‌کند:

$$K = s + Null(T_A)$$

اگر $s, w \in K$ داریم:

$$A(w - s) = Aw - As = b - b = ۰$$

پس داریم $w - s \in Null(T_A)$ پس، اگر $k = w - s \in Null(T_A)$ پس:

$$w = s + k \in s + Null(T_A)$$

در نتیجه (*) $K \subset s + Null(T_A)$.

برای نشان دادن شمول معکوس، فرض کنید $w \in s + Null(T_A)$. پس $w = s + k$ و $Ak = ۰$. حال داریم:

$$Aw = A(s + k) = As + Ak = b + ۰ = b$$

پس $w \in K$ ، و (**) $s + Null(T_A) \subset K$.

در نتیجه از (*) و (**) داریم: $K = s + Null(T_A)$.

قضیه ۹

اگر $Ax = b$ یک دستگاه با n معادله‌ی خطی و m مجهول باشد. دستگاه یک پاسخ $A^{-1}b$ خواهد داشت اگر و تنها اگر A معکوس‌پذیر باشد.

اگر A وارون پذیر باشد، جایگزینی $A^{-1}b$ در معادله می‌دهد

$$A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = I_n b = b$$

بنابراین این یک جواب است. اگر s هر جواب دیگری باشد، آنگاه $As = b$ و در نتیجه $s = A^{-1}b$ است، بنابراین جواب یکتا است. به طور معکوس، اگر سیستم دقیقاً یک جواب s داشته باشد، سپس با استفاده از قضیه‌ی ۷ داریم :

$$K = s + Null(T_A) = \{s\}$$

پس $Null(T_A) = \{0\}$، اما همچنین پوشا است، زیرا $T_A \in \mathcal{L}(R^n, R^n)$ مجموعه‌های مستقل خطی را به مجموعه‌های مستقل خطی تبدیل می‌کند: به طور خاص، یک پایه $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ را به پایه $T_A(\beta) = \{T_A(v_1), \dots, T_A(v_n)\}$ تبدیل می‌کند (زیرا اگر $T(\beta)$ به طور خطی مستقل باشد، به دلیل داشتن n عنصر، یک پایه است). چون یک پایه است، $T_A(\beta)$ R^n را می‌پوشاند، بنابراین اگر $v \in R^n$، وجود دارد $a_1, \dots, a_n \in R$ به طوری که

$$v = a_1 T_A(v_1) + \dots + a_n T_A(v_n) = T_A(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$$

گذاشتن $u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ نشان می‌دهد که $T_A(u) = v$، بنابراین T_A، و در نتیجه A، پوشا است و بنابراین وارون پذیر است.

مثال ۶

وارون ماتریس زیر را پیدا کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۴ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای پیدا کردن وارون ماتریس A از روش گاوس جردن استفاده می‌کنیم. یعنی ماتریس $[AI_۳]$ را در نظر می‌گیریم و $reduced\, echelon\, form$ آن را حساب می‌کنیم. اگر حاصل به فرم $[I_۳B]$ بود در آن صورت ماتریس وارون‌پذیر است و وارون آن برابر B است و در غیر این صورت ماتریس وارون پذیر نیست.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ -۴ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۴ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در عملیات بالا ۴ برابر سطر اول با سطر سوم جمع شده است و حاصل به شکل $[I_۳B]$ است. پس وارون ماتریس A می‌شود:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

قضیه ۱۰

نشان دهید که هر ماتریس پایین مثلثی با درایه‌های قطر اصلی ناصفر وارون‌پذیر است.

برای اثبات وارون‌پذیری این ماتریس ثابت می‌کنیم که ستون‌های آن نسبت به هم مستقل خطی هستند. برای اینکار فرض کنید که ماتریس ما به شکل زیر باشد:

$$L = \begin{bmatrix} l_{۱۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ l_{۲۱} & l_{۲۲} & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n۱} & l_{n۲} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ l_۱ & l_۲ & \cdots & l_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

اگر ستون‌های L مستقل خطی نباشند یعنی اعداد همگی ناصفر $x_۱$ تا x_n وجود دارند که $\sum_{i=۱}^{n} l_i x_i = ۰$ و این یعنی که $LX = ۰$ برای $x^T = [x_۱ \cdots x_n]$. n معادله n مجهول این تساوی را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} l_{۱۱}x_۱ = ۰ \\ l_{۲۱}x_۱ + l_{۲۲}x_۲ = ۰ \\ \vdots \\ l_{n۱} + l_{n۲} + \cdots + l_{nn} = ۰ \end{cases}$$

از تساوی اول با توجه به ناصفر بودن $l_{۱۱}$ نتیجه می‌گیریم که $x_۱ = ۰$. با جایگذاری $x_۱ = ۰$ در تساوی دوم و مجددا با توجه به ناصفر بودن $l_{۲۱}$ نتیجه می‌گیریم که $x_۲$ مساوی ۰. به همین ترتیب این روند را ادامه می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم که تمام xi ها برابر ۰ هستند که خلاف فرض اولیه ما برای مستقل خطی بودن ستون‌های L بود. پس به تناقض رسیدیم و L وارون‌پذیر است.

قضیه ۱۱

نشان دهید که هر ماتریس بالا مثلثی با درایه‌های قطر اصلی ناصفر وارون‌پذیر است.

مشابه قضیه قبلی، برای اثبات وارون‌پذیری این ماتریس ثابت می‌کنیم که ستون‌های آن نسبت به هم مستقل خطی هستند. برای اینکار فرض کنید که ماتریس ما به شکل زیر باشد:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

اگر ستون‌های U مستقل خطی نباشند یعنی اعداد همگی ناصفر x_1 تا x_n وجود دارند که $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = 0$ و این یعنی که $UX = 0$ برای $x^T = [x_1 \cdots x_n]$. n معادله n مجهول این تساوی را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}xn = 0 \\ u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2n}xn = 0 \\ \vdots \\ u_{nn} = 0 \end{cases}$$

از تساوی آخر با توجه به ناصفر بودن u_{nn} نتیجه می‌گیریم که $x_n = 0$. با جایگذاری $x_n = 0$ در تساوی یکی مانده به آخر و مجددا با توجه به ناصفر بودن u_{n-1n-1} نتیجه می‌گیریم که x_{n-1} مساوی ۰. به همین ترتیب این روند را ادامه می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم که تمام x_i ها برابر ۰ هستند که خلاف فرض اولیه ما برای مستقل خطی بودن ستون‌های U بود. پس به تناقض رسیدیم و U وارون‌پذیر است.

قضیه ۱۲

اگر M یک ماتریس مربعی و وارون‌پذیر باشد در آن صورت رنک M با M^{-1} برابر است.

فرض کنید که M یک ماتریس n در n باشد. در آن صورت با توجه به اینکه وارون دارد یعنی رنک آن برابر تعداد سطرها و یا ستون‌های آن یعنی n است. توجه کنید که می‌دانیم که M^{-1} نیز یک ماتریس مربعی n در n است که وارون دارد. پس این ماتریس هم $full\,rank$ است و رنک آن برابر n است. پس نتیجه می‌گیریم که رنک M با M^{-1} برابر است.

قضیه ۱۳

فرض کنید که A یک ماتریس m در n و B یک ماتریس وارون‌پذیر n در n باشد. در آن صورت ثابت کنید که rank(AB)=rank(A)

می‌دانیم که اگر X و Y دو ماتریس دلخواه باشند در آن صورت $rank(XY) \leq rank(X), rank(Y)$ پس در این مثال داریم که $rank(AB) \leq rank(A)$ حال از طرفی داریم که

$$rank((AB)B^{-1}) = rank(A) \leq rank(AB)$$

پس یکبار بدست آوردیم که $rank(A)$ بیشتر مساوی $rank(AB)$ است و یکبار هم بدست آوردیم که کمتر مساوی آن است. پس نتیجه می‌گیریم که $rank(AB) = rank(A)$

مثال ۷

چرا ماتریس تغییر مبنا وارون‌پذیر است؟

فرض کنید که $P_{C\longleftarrow B}$ یک ماتریس تغییر مبنا برای تبدیل مبنای $B = \{b_۱, b_۲, ..., b_n\}$ به مبنای $C = \{c_۱, c_۲, ..., c_n\}$ باشد. در آن صورت می‌دانیم که

$$[x]_C = P_{C\longleftarrow B}[x]_B$$

و همچنین می‌دانیم که این ماتریس برابر است با:

$$P_{C\longleftarrow B} = [[b_۱]_C[b_۲]_C...[b_n]_C]$$

حال می‌دانیم که $b_۱$ تا b_n مستقل خطی هستند(با توجه به مبنا بودن مجموعه B) و می‌دانیم که تبدیل به مبنای C یک تبدیل خطی است پس خاصیت مستقل خطی بودن را حفظ می‌کند یعنی $[b_۱]_C$ تا $[b_n]_C$ هم نسبت به هم مستقل خطی هستند. پس ستون های ماتریس تغییر مبنا مستقل خطی هستند و نتیجه می‌گیریم که این ماتریس باید وارون‌پذیر باشد.
همچنین می‌توانیم وارون این ماتریس را نیز بدست بیاوریم. وارون این ماتریس برابر $P_{B\longleftarrow C}$ است چرا که

$$[x]_B = P_{B\longleftarrow C}[x]_C$$

و اگر $P_{C\longleftarrow B}$ را در دو طرف این تساوی از چپ ضرب کنیم نتیجه می‌گیریم که $P_{C\longleftarrow B}P_{B\longleftarrow C}$ برابر I است.