به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاییز ۱۴۰۲

قضایای اسلاید Orthogonality

مثال ۱

(آ) بردار صفر به هر برداری عمود است.

(ب) پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ یک مجموعه دو به دو عمود است.

(آ) با توجه به تعریف ضرب داخلی داریم

$$\mathbf{0}^T x = \sum_{i=۱}^{n} ۰ \times x_i = ۰$$

(ب) می‌دانیم که پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ برابر است با

$$e_۱, \ldots, e_n$$

که برای هرکدام از آنها می‌دانیم

$$e_i^T e_j = \begin{cases} ۱ & i = j \\ ۰ & \text{O.W} \end{cases}$$

پس این مجموعه پایه عمود می‌باشد.

قضیه ۱

(آ) ثابت کنید که مجموعه S که شامل k بردار ناصفر دو به دو عمود می‌باشد یک پایه برای فضایی است که می‌سازد.

(ب) اگر بردارها در فضای برداری $V = \mathbb{R}^n$ باشد ثابت کنید که به ازای $n = k$ این مجموعه پایه برای V می‌باشد.

(آ) برای اثبات گزاره اول کافی است ثابت کنیم که $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ مستقل خطی می‌باشند.

$$c_1 a_1 + \cdots + c_k a_k = 0 \implies (c_1 a_1 + \cdots + c_k a_k)^T a_i = 0 \implies c_i a_i^t a_i = 0$$

با توجه به اینکه بردارها ناصفر می‌باشند میدانیم که مقدار $a_i^T a_i$ صفر نیست پس داریم

$$c_i = 0$$

پس این مجموعه مستقل خطی می‌باشد.

(ب) حال فرض کنید که داریم $n = k$. همینطور می‌دانیم که $\dim(V) = n$. فرض کنید این مجموعه تمام اعضا در V را نمی‌سازد یعنی عضوی مانند u وجود دارد که به ازای آن مجموعه زیر مستقل خطی می‌باشد.

$$\{a_1, \dots, a_k, u\}$$

همینطور می‌دانیم که تعداد اعضای این مجموعه مستقل خطی $n + 1$ یعنی بیشتر از $\dim(V)$ می‌باشد که این تناقض است. بنابراین مجموعه S تمام اعضا در فضای برداری را می‌سازد و یک پایه عمود می‌باشد.

قضیه ۲

نشان دهید $W^\perp$ یک زیر فضا است و داریم $W^\perp \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

در ابتدا کافی است نشان دهیم که این فضا ۳ خاصیت خواسته شده را دارد.

$$\forall_{x\in W} \ : \ \mathbf{0}^T x = ۰ \implies \mathbf{0} \in W^\perp$$

$$u, v \in W^\perp \implies \forall_{x\in W} \ : \ u^T x = ۰, v^T x = ۰ \implies \forall_{x\in W} \ : \ (u+v)^T x = ۰ \implies u+v \in W^\perp$$

$$u \in W^\perp, c \in \mathbb{F} \implies \forall_{x\in W} \ : \ u^T x = ۰ \implies \forall_{x\in W} \ : \ (cu)^T x = ۰ \implies cu \in W^\perp$$

حال فرض کنید یک عضو در این دو مجموعه مشترک باشد

$$u \in W, u \in W^\perp \implies u^T u = ۰ \implies u = \mathbf{0}$$

بنابراین تنها عضو اشتراک آن‌ها عضو صفر می‌باشد.

مثال ۲

پایه عمود برای فضای ساخته شده توسط ۳ بردار زیر را پیدا کنید

$$a = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \ , \ c = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

الگوریتم گرام اشمیت را بر روی این بردارها اجرا می‌کنیم. در ابتدا داریم

$$q_۱ = \frac{a}{|a|} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

حال b را بر روی $q_۱$ تصویر می‌کنیم و از آن کم می‌کنیم.

$$\hat{q}_۲ = b - (b^T q_۱) q_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} - \frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ ۰ \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

$$q_۲ = \frac{\hat{q}_۲}{|\hat{q}_۲|} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

حال همینکار را برای c تکرار می‌کنیم.

$$\hat{q}_۳ = c - (c^T q_۱) q_۱ - (c^T q_۲) q_۲ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$q_۳ = \frac{\hat{q}_۳}{|\hat{q}_۳|} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

مثال ۳

برای فضای $P_{۲}(x)$ یک پایه عمود با توجه به ضرب داخلی زیر معرفی کنید.

$$< f, g >= \int_{-۱}^{۱} f(x)g(x)\, dx$$

در ابتدا می‌دانیم که $\mathbf{1}, x, x^{۲}$ یک پایه برای این فضا می‌باشد. حال الگوریتم را بر روی آن‌ها اجرا می‌کنیم.

$$q_{۱} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{1}|} = \frac{۱}{۲} \times \mathbf{1}$$

$$\hat{q}_{۲} = x - < \mathbf{1}, x > \mathbf{1} = x$$

دقت کنید که داریم

$$< \mathbf{1}, x >= \int_{-۱}^{۱} x\, dx = ۰$$

$$q_{۲} = \frac{\hat{q}_{۲}}{|\hat{q}_{۲}|} = \frac{\sqrt{۶}}{۲} x$$

$$\hat{q}_{۳} = x^{۲} - < \mathbf{1}, x^{۲} > \mathbf{1} - < x, x^{۲} > x = x^{۲} - \frac{۲}{۳}$$

$$q_{۳} = \frac{\hat{q}_{۳}}{|\hat{q}_{۳}|} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}(x^{۲} - \frac{۲}{۳})$$

مثال ۴

بردار x را بر اساس ترکیبی خطی از $a_۱, a_۲, a_۳$ بنویسید.

$$x = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \ , \ a_۱ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix} \ , \ a_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \ , \ a_۳ = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \ ,$$

با توجه به اینکه $a_۱, a_۲, a_۳$ پایه عمود می‌باشند برای پیدا کردن ضرایب کافی است ضرب داخلی x را با هرکدام از بردارها حساب کنیم.

$$x = c_۱ a_۱ + c_۲ a_۲ + c_۳ a_۳$$

$$\implies c_۱ = x^T a_۱ \ , \ c_۲ = x^T a_۲ \ , \ c_۳ = x^T a_۳$$

$$\implies c_۱ = -۳ \ , \ c_۲ = \frac{۳}{\sqrt{۲}} \ , \ c_۳ = \frac{-۱}{\sqrt{۲}}$$

مثال ۵

اگر پایه های دو زیر فضا نسبت به هم عمود باشند، اثبات کنید دو زیر فضا نیز به هم عمودند.

دو زیرفضا دلخواه W و U در نظر می‌گیریم که پایه هایشان، $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}, \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$، برهم عمود هستند. کافیست نشان دهیم هر $\mathbf{w} \in W$ و $\mathbf{u} \in U$ دلخواهی برهم عمودند.

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^T\mathbf{u} &= \Big(\alpha_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n\Big)^T \Big(\beta_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{u}_n\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\beta_j\mathbf{w}_i^T\mathbf{u}_j\end{aligned}$$

از آنجایی که می‌دانیم $\mathbf{w}_i^T\mathbf{u}_j = 0$ برای هر i, j برقرار است، پس دو زیرفضا برهم عمودند.

قضیه ۳

فرض کنید که W زیرفضایی از V و $W^{\perp}$ فضای عمود به W باشد. نشان دهید هر عضو در V را می‌توان به فرم $u = y + \hat{y}$ نوشت به طوری که

$$y \in W \ , \ \hat{y} \in W^{\perp}$$

فرض کنید $S = \{u_۱, \dots, u_k\}$ پایه عمود W باشد. می‌دانیم که S قابل گسترش به یک پایه عمود برای فضای V است. فرض کنید $\dim(V) = n$

$$S' = \{u_۱, \dots, u_k, v_{k+۱}, \dots, v_n\}$$

حال یک عضو مانند x را درون $W^{\perp}$ در نظر بگیرید. می‌دانیم داریم

$$x = c_۱ u_۱ + \dots + c_k u_k + c_{k+۱} v_{k+۱} + \dots c_n v_n$$

حال اگر $c_i \neq ۰$ به ازای $i \leq k$ وجود داشته باشد داریم

$$x^T u_i = c_i |u_i|^۲ \neq ۰ \implies x \notin W^{\perp}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که بردارهای $v_{k+۱}, \dots, v_n$ پایه‌ای عمود برای $W^{\perp}$ می‌باشد. حال یک عضو درون V مانند x را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه S' پایه عمود برای V است داریم

$$x = \frac{x^T u_۱}{u_۱^T u_۱} u_۱ + \dots \frac{x^T u_k}{u_k^T u_k} u_k + \frac{x^T v_{k+۱}}{v_{k+۱}^T v_{k+۱}} v_{k+۱} + \dots + \frac{x^T v_n}{v_n^T v_n} v_n$$

حال اگر تعریف کنیم

$$y = \frac{x^T u_۱}{u_۱^T u_۱} u_۱ + \dots \frac{x^T u_k}{u_k^T u_k} u_k \ , \ \hat{y} = \frac{x^T v_{k+۱}}{v_{k+۱}^T v_{k+۱}} v_{k+۱} + \dots + \frac{x^T v_n}{v_n^T v_n} v_n$$

داریم

$$y \in W \ , \ \hat{y} \in W^{\perp}$$

قضیه ۴

فرض کنید W زیر فضایی از V است. آنگاه برای هر عضو $v \in V$ یک جفت عضو یکتا $w \in W$ و $z \in W^{\perp}$ وجود دارد به طوریکه $v = w + z$.

یک پایه یکه متعامد $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ برای W در نظر بگیرید. می‌خواهیم ضرایب را برای $\mathbf{w} = c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_k\mathbf{w}_k$ طوری تنظیم کنیم که $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ در $W^{\perp}$ بیفتد که یعنی $\mathbf{z}$ عمود به هر $\mathbf{w}_j$ برای $1 \leq j \leq k$ باشد.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} - (c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_k\mathbf{w}_k))^T\mathbf{w}_j &= \mathbf{v}^T\mathbf{w}_j - (c_1\mathbf{w}_1^T\mathbf{w}_j + \cdots + c_k\mathbf{w}_k^T\mathbf{w}_j) \\
&= \mathbf{v}^T\mathbf{w}_j - c_j\mathbf{w}_1^T\mathbf{w}_j \\
&= \mathbf{v}^T\mathbf{w}_j - c_j \\
&= 0 \\
\Rightarrow \mathbf{v}^T\mathbf{w}_j &= c_j
\end{aligned}$$

پس $\mathbf{w}$ و $z = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ بطور یکتا وجود دارند.

نکته: برای اثبات یکتایی می‌توان به صورت زیر نیز عمل کرد.

فرض کنید $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{z} = \mathbf{w}' + \mathbf{z}'$. پس می‌توان گفت $\mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{z} - \mathbf{z}'$. اما $\mathbf{w} - \mathbf{w}'$ عضو W و $\mathbf{z} - \mathbf{z}'$ عضو $W^{\perp}$ است. تنها برداری که به خودش عمود است، صفر است. پس $\mathbf{w} = \mathbf{w}', \mathbf{z} = \mathbf{z}'$