به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاییز ۱۴۰۲

قضایای اسلاید ۱۳

قضیه ۱

اگر دو ماتریس A و B معادل سطری باشند، فضای سطری یکسانی دارند. اگر B به فرم اشلن باشد، ردیف های ناصفر B یک پایه برای فضای سطری A و همچنین B است.

فرض می کنیم A از ضرب ماتریس B در ماتریس عملیات سطری R حاصل می شود، پس:

$$[a_i^T] = [r_i^T]B = \Sigma_{j=1}^{m} r_{ij}[b_j^T] = r_{i1}[b_i^T]$$

پس هر سطری از A ترکیب خطی از سطر های B است. حال که فضای سطری A نیز ترکیب خطی از سطر هایش هست، پس فضای سطری ماتریس‌های A و B یکسان است.

$$B = RREF(A)$$

برای نشان دادن اینکه سطر های ناصفر B پایه هستند باید اثبات کنیم که فضای سطری B را $span$ می کنند و مستقل خطی هستند. فضای سطری B حاصل از ترکیب خطی سطر های آن است . چون سطر های تمام صفر نمی توانند تغییری در جواب ها ایجاد کنند پس سطر های ناصفر فضای سطری را $span$ می کنند. برای استقلال نیز معادله ی $Bx = 0$ را تشکیل می دهیم. می دانیم هر سطر حداقل یک درایه دارد که باقی ندارند پس تنها راهی که معادله برقرار باشد به ازای حالتی هست که $x = 0$

قضیه ۲

ستون های پیوت A یک پایه برای $Col(A)$ است.

برای نشان دادن اینکه ستون های پیوت A پایه هستند باید اثبات کنیم که $Col(A)$ را $span$ می کنند و مستقل خطی هستند.

$B = rref(A)$ را در نظر بگیرید. می دانیم که $Bx = 0$ و $Ax = 0$ پاسخ های یکسانی دارند. بنابراین ضرایب ترکیب خطی هایی از ستون های A و B که برابر با صفر می شوند یکسان است.
الف) نشان می دهیم ستون های پیوت A مستقل خطی اند. ستون های پیوت B بردار های استاندارد $e_1, e_2, \ldots, e_r$ در $\mathcal{R}^m$ می باشند که در این صورت مشخص است که مستقل خطی اند. از آنجایی که ضرایب ترکیب های خطی ستون های A و B که صفر می شوند برابر است بنابراین ستون های پیوت A نیز مستقل خطی اند.
ب)نشان می دهیم ستون های پیوت A فضای $Col(A)$ را $span$ می کنند. ستون غیر پیوت b_k را در ماتریس B در نظر بگیرید. فرض کنید j ستون پیوت قبل از b_k وجود دارد. این ستون ها $e_1, \ldots, e_j$ هستند. تنها j درایه اول در ستون b_k می تواند غیر صفر باشد وگرنه پیوت می شود. بنابراین این ستون ترکیب خطی از $e_1, \ldots, e_j$ می باشد.
از آنجایی که ضرایب ترکیب های خطی هایی از ستون ها A و B که برابر صفر می شوند یکسان است پس ستون غیر پیوت a_k در ماتریس A ترکیب خطی ستون های پیوت قبل از خود می باشد.
حال که موارد الف و ب را نشان دادیم مشخص است که شرایط پایه بودن ستون های پیوت برای $Col(A)$ فراهم است.

مثال ۱

برای ماتریس A موارد زیر را پیدا کنید

- Row Basis
- Column Basis
- dim(Row(A))
- dim(Col(A))
- dim(Null(A))

$$\text{A}=\begin{bmatrix}-2 & -5 & 8 & 0 & -17\\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1\\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-۲ & -۵ & ۸ & ۰ & -۱۷\\ ۱ & ۳ & -۵ & ۱ & ۵\\ ۳ & ۱۱ & -۱۹ & ۷ & ۱\\ ۱ & ۷ & -۱۳ & ۵ & -۳\end{bmatrix} \longrightarrow^{RREF} \begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & -۲ & ۰ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۵\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix}-۲ & ۱ & ۳ & ۱\\ -۵ & ۳ & ۱۱ & ۷\\ ۸ & -۵ & -۱۹ & -۱۳\\ ۰ & ۱ & ۷ & ۵\\ -۱۷ & ۵ & ۱ & -۳\end{bmatrix} \longrightarrow^{RREF} \begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۷ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$row \quad basis = pivotCol(A^T) = \begin{bmatrix}-۲ & -۵ & ۸ & ۰ & -۱۷\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱ & ۳ & -۵ & ۱ & ۵\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۱ & ۷ & -۱۳ & ۵ & -۳\end{bmatrix}$$

$$column \quad basis = pivotCol(A) = \begin{bmatrix}-۲\\ ۱\\ ۳\\ ۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-۵\\ ۳\\ ۱۱\\ ۷\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ ۷\\ ۵\end{bmatrix}$$

$$dim(Row(A)) = number \quad of \quad row \quad basis = ۳$$
$$dim(Col(A)) = number \quad of \quad column \quad basis = ۳$$
$$dim(Null(A)) = number \quad of \quad non-pivot \quad columns = ۲$$

دقت کنید که پایه های زیر نیز معتبر می باشند.

$$column \quad basis = \begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۲\\ ۰\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ ۷\\ ۰\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$row \quad basis = \begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۰ & ۱ & -۲ & ۰ & ۳\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۵\end{bmatrix}$$

مثال ۲

اگر ستون های A مستقل خطی باشند:

$$nullity(A) =?$$

$$colrank(A) =?$$

اگر ستون های ماتریس A مستقل خطی باشند پس ماتریس A_{m*n} ماتریسی بلند است یعنی $m > n$ و ستونی غیر پیوت ندارد، پس

$$nullity(A) = number \quad of \quad non \quad pivot \quad columns = n - n = ۰$$

$$colrank(A) = number \quad of \quad pivot \quad columns = n$$

مثال ۳

$$\text{nullity(A)} = ? \quad \text{colrank(A)} = ?$$

$$\text{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -2x_3 - x_4 \\ -x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$nullity(A) = 2, colRank(A) = 2$$

مثال ۴

بعد فضا های $NullSpace$ و $ColumnSpace$ را بیابید

$$\begin{bmatrix} -۳ & ۶ & -۱ & ۱ & -۷ \\ ۱ & -۲ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۲ & -۴ & ۵ & ۸ & -۴ \end{bmatrix}$$

(row reduce the Augmented Matrix [A 0] to echelon form)

$$\begin{bmatrix} A & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & ۶ & -۱ & ۱ & -۷ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۲ & ۳ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۴ & ۵ & ۸ & -۴ & ۰ \end{bmatrix} \longrightarrow^{RREF} = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۰ & -۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \longrightarrow x_۱ = ۲x_۲ + x_۴ - ۳x_۵, x_۳ = -۲x_۴ + ۲x_۵$$

number of basic variables = colRank(A) = ۲

number of free variables = nullity(A) = ۳

قضیه ۳

$$\mathrm{Nullity(A) + ColRank(A) = n}$$
$$\mathrm{Dim(Null(A)) + Dim(Range(A)) = n}$$
$$\{\text{number of pivot columns}\} + \{\text{number of non-pivot columns}\} = \{\text{number of columns}\}$$

فرض می کنیم که $Nullity(A), k$ عضو دارد، از آنجایی که یک زیرفضا است پس می توانیم پایه های $\{v_1, \dots, v_k\}$ را برای آن در نظر بگیریم، می توانیم این وکتور ها را با اضافه کردن بردار های $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ به یک پایه برای فضای R^n به دست آورد. حال تبدیل A را روی اعضای این فضا در نظر بگیرید، می دانیم با اعمال این تبدیل بر روی پایه ها به پایه ای برای فضای $Col(A)$ می رسیم که تعداد اعضایش برابر با $Dim(Range(A)) = ColRank(A)$ است.

$$\{v_1, \dots, v_n\} \longrightarrow^A \{0, \dots, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

پس

$$ColRank(A) = n - k$$
$$\mathrm{Nullity(A) + ColRank(A) = k + (n - k) = n}$$

قضیه ۴

اگر A یک ماتریس $m * n$ با رنک r باشد، پس:
$n - r$ جواب پایه به سیستم $Ax = ۰$ با استفاده از الگوریتم گاوسی، پایه هایی از $null(A)$ هستند، پس $dim(Null(A)) = n - r$

اگر A یک ماتریس $m * n$ با رنک r باشد، پس تعداد جواب‌های پایه به سیستم $Ax = ۰$ برابر خواهد بود با $n - r$. این جواب‌های پایه با استفاده از الگوریتم گاوسی به دست می‌آیند و پایه‌های فضای $null(A)$ هستند. پس داریم:

$$dim(Null(A)) = n - r$$

که در آن، $dim(Null(A))$ بیانگر بُعد فضای خنثی یا $null(A)$ است.

مثال ۵

$$\text{Nullspace(A)} = ?$$

$$\text{A=} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -2x_3 - x_4 \\ -x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$nullity(A) = 2, colRank(A) = 2 \qquad \text{Nullspace(A)=}\{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

قضیه ۵

(رنک یک ماتریس برابر است با رنک ترانهاده اش)
فرض کنید ماتریس A یک ماتریس $m * n$ است، پس $Colrank(A) = colrank(A^T)$

لم ۱: $A^TAx = 0 \iff Ax = 0$

- **اثبات جهت اول:** فرض کنید $Ax = 0$. اگر از سمت چپ در A^T ضرب کنیم، داریم:

$$A^T(Ax) = A^T \cdot 0 = 0$$

بنابراین $A^TAx = 0$.

- **اثبات جهت دوم:** فرض کنید $A^TAx = 0$. اگر از سمت چپ در x^T ضرب کنیم، داریم:

$$x^T(A^TAx) = 0$$

چون $(x^TA^T)(Ax) = (Ax)^T(Ax) = \|Ax\|^2$ برابر با نُرم Ax به توان دو است، و این مقدار صفر است، پس $\|Ax\| = 0$.پس $Ax = 0$ است.

لم ۲: $ColRank(A^TA) = ColRank(A)$

با استفاده از لم ۱ می‌دانیم که $nullspace(A)$ و $nullspace(A^TA)$ برابرند، پس بُعد فضای تهی آنها برابر است. با استفاده از قضیه اصلی $Nullity - Rank$ داریم:

$$\text{Nullity} + \text{ColRank} = \text{تعداد ستون‌ها}$$

تعداد ستون‌های A برابر است با n. ماتریس A^TA یک ماتریس $(n \times m) \times (m \times n)$ است، بنابراین ماتریس $n \times n$ بوده و تعداد ستون‌های آن نیز n است.
پس طرف راست هر دو برابر و $nullity$ آنها نیز برابر است، بنابراین $ColRank$ هر دو برابر است.

لم ۳: $dim(\mathbf{Range}(AB)) \le dim(\mathbf{Range}(A))$

برای این لم، می‌دانیم که می‌توانیم ضرب ماتریسی AB را به چهار صورت بنویسیم. یکی از این روش‌ها این است که ماتریس A را از ستون‌هایش نگاه کنیم و ماتریس B را به هر ستون A ضرب کنیم. بنابراین ماتریس AB برابر است با:

$$A[1]B, A[2]B, \dots, A[n]B$$

بنابراین هر ستون از ماتریس حاصل ضرب یک ترکیب خطی از ستون‌های A است. اگر یک تبدیل خطی داشته باشیم که AB ماتریس استاندارد آن باشد، آنگاه $range$ تبدیل خطی AB زیرمجموعه‌ای از $range$ تبدیل خطی است که A ماتریس استاندارد آن است. بنابراین اگر $dimension$ هر دو طرف را بگیریم به نابرابری مورد نظر می‌رسیم.

با استفاده از سه لم بالا، قضیه به صورت زیر اثبات می‌شود:

میدانیم که طبق تعریف$dim(Range(A)) = ColRank(A)$. ابتدا با استفاده از لم ۳ و جایگذاری A^T به جای A و همچنین جایگذاری A به جای B در معادله لم ۳ خواهیم داشت :

$$dim(Range(A^TA)) \le dim(Range(A^T)) \longrightarrow ColRank(A^TA) \le ColRank(A^T)$$

حال با توجه به لم ۲ داریم : $ColRank(A^TA) = ColRank(A)$.
با استفاده از ۲ معادله بالا به این نتیجه خواهیم رسید که :

$$ColRank(A) \le ColRank(A^T)$$

با استفاده از لم ۳ و جایگذاری A به جای A و همچنین جایگذاری A^T به جای B در معادله لم ۳ خواهیم داشت :

$$dim(Range(AA^T)) \le dim(Range(A)) \longrightarrow ColRank(AA^T) \le ColRank(A)$$

حال با توجه به لم ۲(به جای A ماتریس ترانهاده اش قرار داده شده) داریم : $ColRank(AA^T) = ColRank(A^T)$.
با استفاده از ۲ معادله بالا به این نتیجه خواهیم رسید که :

$$ColRank(A^T) \le ColRank(A)$$

بنابراین:

$$ColRank(A) = ColRank(A^T)$$

قضیه ۶

$ColRank(A) = RowRank(A)$

در کل این برابر با رنک ماتریس است. ((rank(A))

طبق اثبات قضیه‌ی قبل رنک ستونی یک ماتریس و ترانهاده‌ی آن باهم برابر است. می‌دانیم که ترانهاده ماتریس جای سطر و ستون را تغییر می‌دهد. پس رنک فضای ستونی یک ماتریس با رنک فضای سطری آن برابر است.

قضیه ۷

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times k$ باشد. آنگاه داریم :

$$Rank(AB) \leq min\{Rank(A), Rank(B)\}$$

$$\forall x \in ker(B); Bx = \cdot \implies ABx = \cdot \implies x \in ker(AB) \implies ker(B) \subseteq ker(AB) \implies Nullity(B) \leq Nulliy(AB)$$

$$Rank(B) + Nullity(B) = Rank(AB) + Nullity(AB) = k \implies Rank(AB) \leq Rank(B)$$

$$C = AB,\ Rank(AB) = Rank(C) = Rank(C^T) = Rank(B^T A^T) \leq Rank(A^T) = Rank(A)$$

$$Rank(AB) \leq Rank(A)\ \ \&\ \ Rank(AB) \leq Rank(B) \implies Rank(AB) \leq min\{Rank(A), Rank(B)\}$$