به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

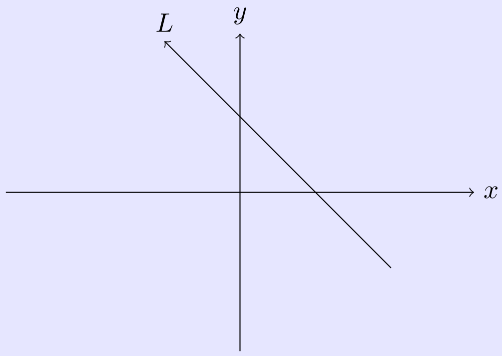
حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاییز ۱۴۰۲

قضایای اسلاید Subspaces

مثال ۱

- اگر $H = Span(x_۱, x_۲)$ آنگاه آیا H زیر فضای $R^۲$ است؟
- آیا L زیرفضای $R^۲$ است؟



- آیا فضای برداری $R^۲$ یک زیرفضا از فضای برداری $R^۳$ است؟
- آیا H یک زیر مجموعه از $R^۳$ است؟ $H = \begin{bmatrix} s \\ t \\ ۰ \end{bmatrix}$

- (آ) مجموعه H دارای بردار صفر است زیرا $H \ni ۰ = ۰x_۲ + ۰x_۱$
  (ب) جمع دو بردار عضو این مجموعه نیز درونش قرار میگیرد زیرا $(x_۱ + x_۲) \in Span(x_۱, x_۲) = H$
  (ج) ضرب هر اسکالر در بردار های این مجموعه نیز مجددا درونش قرار میگیرد $\alpha.x_۱ \in Span(x_۱, x_۲) = H$
  با توجه به سه مورد بالا، این مجموعه یک زیر فضا از فضای برداری $R^۲$ است.
- خیر، زیرا بردار صفر در این مجموعه قرار ندارد و شرط اول زیرفضا بودن نقض شده است.
- خیر زیرا بردار صفر در فضای برداری $R^۲$ با بردار صفر در فضای برداری $R^۳$ برابر نیست.
- بله، مجموعه H معادل تمام بردار های عضو $R^۳$ است که عضو سوم آنها برابر با صفر است.

قضیه ۱

زیر مجموعه نا تهی U از مجموعه V یک زیرفضا از فضای برداری V است اگر و تنها اگر به ازای هر دو بردار b و c درون مجموعه U ، و یک اسکالر α از فیلد F، بردار $\alpha b + c$ مجددا درون U قرار بگیرد.

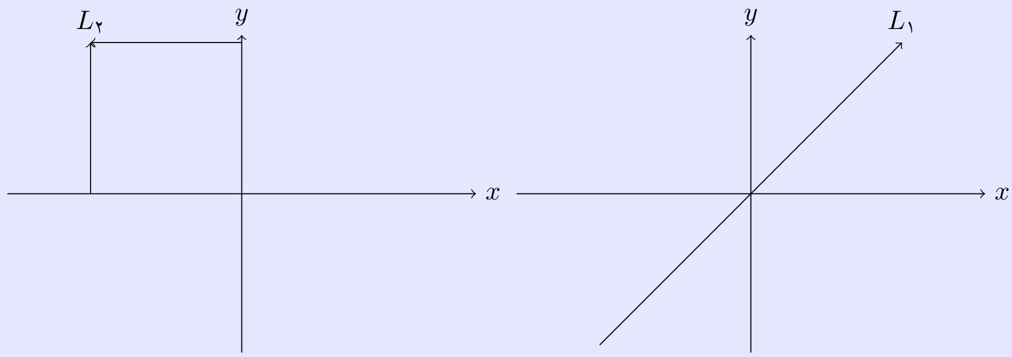
هر subspace باید سه شرط زیر را داشته باشد:

- بردار صفر عضوی از آن باشد
- جمع هر دو بردار دلخواه از این زیرفضا، مجددا داخل زیرفضا قرار گیرد
- ضرب هر اسکالر فیلد F که فضای برداری روی آن تعریف شده است، در بردار های زیرفضا، مجددا درون زیر فضا قرار گیرد

ابتدا طرف اول را اثبات می کنیم: اگر U زیرفضای فضای برداری V باشد، آنگاه به ازای هر دو بردار دلخواه از U و اسکالر دلخواه از فیلد F، αb + c درون U قرار میگیرد: می دانیم طبق تعریف زیرفضا، بردار به دست آمده از ضرب اسکالری از فیلد F در هر بردار دلخواه از زیرفضا، مجددا درون زیرفضا قرار میگیرد، در نتیجه، بردار αb درون زیرفضای U قرار میگیرد. از طرفی می دانیم جمع هر دو بردار دلخواه از زیرفضا نیز درون آن قرار میگیرد، پس αb + c نیز درون U قرار میگیرد
اگر به ازای هر دو بردار دلخواه b و c درون زیر مجموعه U از فضای برداری V و اسکالر دلخواه از فیلد F، αb + c عضوی از U باشد آنگاه میخواهیم اثبات کنیم که U زیرفضایی از فضای برداری V می باشد: طبق سه شرط زیر فضا که در بالا نوشته شده است، اگر دو بردار b و c انتخاب شده را یکسان در نظر بگیریم و ضریب آلفا را نیز برابر با منفی یک در نظر بگیریم آنگاه بردار به دست آمده صفر می شود و طبق فرض درون U قرار خواهد داشت، پس اولین شرط صدق می کند.
می توانیم به جای اسکالر α یک قرار دهیم، در این صورت، جمع هر دو بردار دلخواه از زیر مجموعه U مجددا درون خودش قرار میگیرد و شرط دوم نیز صادق است.
حال که بردار صفر درون زیر مجموعه U قرار دارد، می توانیم به جای c بردار صفر را قرار دهیم و در نتیجه، به ازای هر بردار دلخواه b ، αb که آلفا اسکالری دلخواه از فیلد F می باشد نیز درون U قرار دارد پس شرط سوم نیز صرق می کند.

مثال ۲

- مجموعه n تایی $(x_۱, ..., x_n)$ به طوری که $x_i \in F^n$ و $x_۱ = ۰$ یک زیر فضا است یا خیر؟
- مجموعه n تایی $(x_۱, ..., x_n)$ به طوری که $x_i \in F^n$ و $x_۱ = ۱ + x_۲$ $(n >= ۲)$ یک زیر فضا است یا خیر؟
- هر فضای برداری با بیش از یک عضو حداقل چند زیر فضا دارد؟
- برای $R^۲, R^۳, R^۴$ زیرفضا مثال بزنید.
- آیا نمودار های داده شده زیرفضایی از $R^۲$ هستند یا خیر؟



- زیرفضا است:
  (آ) میتوانیم همه x_i ها را صفر قرار دهیم.
  (ب) $(x_۱, ..., x_n) + (y_۱, ..., y_n) = ((x_۱ + y_۱), ..., (x_n + y_n))$ از طرفی می دانیم که $x_۱, y_۱$ هر دو برابر با صفر هستند، پس جمع این دو نیز صفر است، موارد دیگر نیز جمعشان مجدد درون F^n قرار میگیرد.
  (ج) ضرب هر اسکالر در صفر مجددا صفر است، ضرب اسکالر در بقیه عناصر نیز مجددا درون F^n قرار خواهد گرفت.
- زیرفضا نیست زیرا دارای عضو صفر نیست. اگر $x_۱$ بخواهد صفر باشد آنگاه طبق فرض صورت سوال $x_۲ = -۱$ خواهد بود.
- حداقل ۲ زیرفضا دارد
  (آ) عنصر صفر: زیرا خودش حاوی صفر است، جمعش با خودش صفر می شود و ضرب هر اسکالر در صفر نیز مجددا صفر می شود که درون زیرفضا خواهد بود.
  (ب) خود فضای برداری: زیرا طبق تعریف فضای برداری، هر سه شرط یک زیرفضا برای آن صادق است.
- (آ) $\mathbf{R}^۲$: خط $y = x$ یک زیرفضا است:
    - $(۰, ۰) \in S = \{(x, y) | x = y\}$
    - $(x_۱, y_۱) + (x_۲, y_۲) = (x_۱ + x_۲, x_۱ + x_۲) \in S$
    - $\alpha(x_۱, y_۱) = (\alpha x_۱, \alpha x_۱) \in S$

  (ب) $\mathbf{R}^۳$: صفحه $z = ۰$ یک زیرفضا است:
    - $(۰, ۰, ۰) \in S = \{(x, y, z) | z = ۰\}$
    - $(x_۱, y_۱, z_۱) + (x_۲, y_۲, z_۲) = (x_۳, y_۳, ۰) \in S$
    - $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z = ۰) \in S$

  (ج) $\mathbf{R}^۴$: $S = \{(x, y, z, k) | y = ۲x\}$ یک زیرفضا است:
    - $(۰, ۰, ۰, ۰) \in S$ زیرا $۰ = ۲ \times ۰$
    - $(x_۱, y_۱, z_۱, k_۱) + (x_۲, y_۲, z_۲, k_۲) = (x_۳ = (x_۱ + x_۲), y_۳ = ۲ \times (x_۱ + x_۲), z_۳, k_۳) \in S$
    - $\alpha(x, y, z, k) = (\alpha x, ۲ \times \alpha x, \alpha z, \alpha k) \in S$
-
    - سمت راست: زیرفضا است، زیرا حاوی صفر است و جمع هر دو نقطه از آن درونش قرار گرفته و ضرب اسکالر در نقاطش نیز صرفا اسکیل آن را تغییر داده و مجددا درونش قرار میگیرد.
    - سمت چپ: زیرفضا نیست، زیرا با ضرب اسکالر -۱ در بردار $L_۲$ در ربع چهارم نمودار قرار میگیرد که شرط سوم زیرفضا بودن را نقض می کند.

مثال ۳

H برابر با مجموعه همه بردار های به فرم $\begin{bmatrix} a-3b \\ b-a \\ a \\ b \end{bmatrix}$ است، ثابت کنید H زیرفضای R^4 است.

- اگر a و b را صفر قرار دهیم، بردار صفر به دست می آید و شرط اول برقرار می شود.
- $\begin{bmatrix} a_1-3b_1 \\ b_1-a_1 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2-3b_2 \\ b_2-a_2 \\ a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1+a_2)-3(b_1+b_2) \\ (b_1+b_2)-(a_1+a_2) \\ (a_1+a_2) \\ (b_1+b_2) \end{bmatrix}$ پس با قرار دادن پارامتر های $a_3 = a_1 + a_2$ و $b_3 = b_1 + b_2$ جمع دو بردار دلخواه مجددا درون مجموعه قرار می گیرد و شرط دوم زیر فضا بودن نیز برقرار می شود.
- $\alpha(\begin{bmatrix} a-3b \\ b-a \\ a \\ b \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} (\alpha a-3\alpha b) \\ \alpha b-\alpha a \\ \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$ پس با قرار دادن پارامتر های $a_2 = \alpha a$ و $b_2 = \alpha b$ حاصل ضرب هر اسکالر در هر بردار این مجموعه نیز مجددا درون آن قرار می گیرد و شرط سوم نیز برقرار می شود.

مثال ۴

- مجموعه همه تابع های پیوسته حقیقی روی R زیرفضای فضای برداری همه تابع های روی R است.
- مجموعه همه تابع های مشتق پذیر حقیقی روی R زیرفضای فضای برداری همه تابع های روی R است.
- مجموعه همه تابع های $D(f(x)) = f'(x)$ زیر فضای فضای برداری همه تابع های روی R است.

- (آ) تابع $f(x) = ۰$ یک تابع پیوسته است. پس زیرفضای مورد نظر دارای صفر است.
  (ب) اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ پیوسته باشند، آنگاه جمع آنها نیز پیوسته است.
  (ج) ضرب هر اسکالر α در تابع پیوسته $f(x)$ یک تابع پیوسته خروجی میدهد.
- (آ) تابع $f(x) = ۰$ مشتق پذیر است و مشتق آن برابر با صفر است.
  (ب) جمع دو تابع مشتق پذیر، یک تابع مشتق پذیر خواهد بود.
  (ج) ضرب هر اسکالر دلخواه α در یک تابع مشتق پذیر، تابعی مشتق پذیر خروجی می دهد.
- (آ) اگر تابع $f(x) = ۰$ را ورودی دهیم، صفر خروجی میگیریم.
  (ب) جمع مشتق های دو تابع، برابر مشتق جمع آنها است، یعنی جمع دو تابع نیز عضوی از این زیرفضا است

  $$D(f(x)) + D(g(x)) = D(f(x) + g(x)).$$

  (ج) ضرب یک اسکالر در مشتق یک تابع برابر با مشتق ضرب اسکالر در آن تابع است، پس ضرب اسکالر در تابع مشتق پذیر، مجددا درون زیرفضای در نظر گرفته شده قرار میگیرد $\alpha D(f(x)) = D(\alpha f(x))$

قضیه ۲

اگر W_1 و W_2 زیر فضا هایی از فضای برداری V باشند، آنگاه اشتراک این دو نیز زیر فضای V است

از آنجایی که W_1 و W_2 هر دو زیر فضا هایی از فضای برداری V هستند، پس باید سه شرطی که در قضیه اول مطرح شده است را داشته باشند:
از آنجایی که بردار صفر باید در هر دو زیر فضا باشد، پس در اشتراک آنها نیز قرار دارد و شرط اول صادق است
دو بردار دلخواه a و b را درون اشتراک W_1 و W_2 در نظر میگیریم. از آنجایی که این دو بردار هر دو عضوی از زیر فضای W_1 هستند، پس جمع آنها نیز باید درون W_1 قرار بگیرد؛ همین عبارت برای W_2 نیز صادق است. پس جمع هر دو بردار دلخواه درون اشتراک این دو زیر فضا، درون هر دو قرار دارد، یعنی مجددا داخل اشتراک آن دو است. شرط دوم برقرار است.
مانند بالا، یک بردار دلخواه درون اشتراک دو زیرفضا را در نظر میگیریم، می دانیم به دلیل ویژگی های زیرفضا، حاصل ضرب هر اسکالر دلخواه از فیلد F در این بردار، مجددا درون هر دو زیر فضا قرار میگیرد، در نتیجه درون اشتراک دو زیرفضا قرار گرفته و شرط سوم نیز برقرار می شود.

قضیه ۳

تقاطع یا اشتراک هر تعداد از زیر فضا های فضای برداری V ، یک زیر فضا از فضای برداری V است.

اثبات قضیه ۲ را میتوانیم به بیش از دو فضای برداری تعمیم دهیم و مانند روندی که در قضیه ۲ در پیش گرفتیم عمل کنیم. می توانیم با استفاده از روش استقرا، حالت پایه را قضیه ۲ فرض کنیم و گام استقرا اضافه شدن یک زیر فضای جدید و اثبات کردن زیر فضا بودن اشتراک آن با اشتراک زیر فضا های قبلی باشد. از آنجایی که اشتراک ۱ - k زیر فضای قبلی خود یک زیر فضا شده است، می توانیم مجددا از قضیه ۲ کمک بگیریم و با اضافه کردن K امین زیر فضا، صرفا اشتراک زیر فضای جدید با زیر فضای حاصل از اشتراک ۱ - k تای قبلی را ثابت کنیم.

قضیه ۴

اجتماع دو زیر فضا ممکن است یک زیر فضا نباشد.

در حالتی که یکی از زیر فضا های داده شده زیر مجموعه دیگری باشد، اجتماع آن ها برابر یکی از زیر فضا ها می شود که خود یک زیر فضا است. پس حالتی را در نظر میگیریم که دو زیر فضا، زیر مجموعه یکدیگر نباشند. دو زیر فضای داده شده را $W_۱$ و $W_۲$ در نظر می گیریم. اگر بردار u را عضوی از $W_۱ - W_۲$ و بردار v را عضوی از $W_۲ - W_۱$ در نظر بگیریم آنگاه می دانیم اگر $W_۱ \cup W_۲$ بخواهد یک زیر فضا باشد، آنگاه باید جمع هر دو بردار دلخواه درون آن، مجددا درونش قرار بگیرد. پس u + v درون اجتماع دو زیر فضا قرار دارد، یعنی می تواند عضو $W_۱ - W_۲$ یا $W_۲ - W_۱$ یا $W_۱ \cap W_۲$ باشد.

- $u + v$ عضو $W_۱ - W_۲$ باشد: آنگاه از آنجایی که $W_۱$ زیرفضا است و طبق خواص زیرفضا می دانیم ترکیب خطی بردار های درون آن، داخلش قرار می گیرد، پس بردار $(u + v) - u$ نیز باید درون $W_۱$ قرار بگیرد. در صورتی که طبق فرض صورت سوال، این بردار درون $W_۱$ قرار ندارد.
- $u + v$ عضو $W_۲ - W_۱$ باشد: آنگاه مانند بالا می دانیم که $W_۲$ یک زیرفضا است و طبق خواص آن، باید ترکیب خطی بردار های داخلش، مجددا درونش قرار بگیرد. پس بردار $(u + v) - v$ نیز باید عضو $W_۲$ باشد. اما طبق فرض چنین نیست.
- $u + v$ عضو $W_۱ \cap W_۲$ باشد: آنگاه بردار $u + v$ هم عضو $W_۱$ و هم عضو $W_۲$ است. با توجه به دو قسمت بالا نتیجه گرفتیم که $u + v$ نه می تواند عضو $W_۱$ و نه میتواند عضو $W_۲$ باشد زیرا در صورت جمع با $-u$ یا $-v$ در حالت های $W_۱$ و $W_۲$ به تناقض می رسیم

پس در مجموع ممکن است اجتماع دو زیر فضا یک زیر فضا نباشد.

قضیه ۵

اگر W_1 و W_2 دو زیر فضا از فضای برداری V باشند، آنگاه $W_1 \cup W_2$ یک زیر فضا از V است اگر و تنها اگر $W_2 \subseteq W_1$ یا $W_1 \subseteq W_2$ باشد.

- اگر $W_2 \subseteq W_1$ یا $W_1 \subseteq W_2$ باشد آنگاه $W_1 \cup W_2$ یک زیر فضا است: در صورتی که یکی از این فضا های برداری زیر مجموعه دیگری باشد آنگاه اجتماع این دو برابر با یکی از زیر فضا ها می شود که طبق فرض زیر فضا است.
- اگر $W_1 \cup W_2$ یک زیر فضا باشد آنگاه $W_2 \subseteq W_1$ یا $W_1 \subseteq W_2$ است: فرض می کنیم چنین نباشد، یعنی هر یک از این دو زیر فضا دارای قسمتی نا تهی باشند که در دیگری نیست، طبق آنچه در قضیه ۴ اثبات کردیم، اجتماع این دو مجموعه یک زیر فضا نیست. پس لازم است که یکی زیر مجموعه دیگری باشد.

قضیه ۶

اگر بردار های $v_1, v_2, ..., v_p$ درون فضای برداری V باشند، آنگاه $Span\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ یک زیر فضا از فضای برداری V است.

با یاد آوری شرایط یک زیر فضا در قضیه ۱ به اثبات می پردازیم:

- با صفر گذاشتن ضرایب اسکالر بردار ها، بردار صفر به دست می آید که درون Span قرار می گیرد.
- $(a_1.v_1 + ... + a_p.v_p) + (b_1.v_1 + ... + b_p.v_p) = (a_1 + b_1)v_1 + ... + (a_p + b_p)v_p = c_1.v_1 + ... + c_p.v_p$ ، پس برای جمع هر دو بردار دلخواه درون Span می توانیم ضرایب را جمع کرده و نشان دهیم بردار به دست آمده مجددا عضوی از Span است.
- $b(a_1.v_1 + ... + a_p.v_p) = (b.a_1)v_1 + ... + (b.a_p)v_p = c_1.v_1 + ... + c_p.v_p$ پس با ضرب کردن هر اسکالر دلخواه در هر بردار دلخواه در Span نشان دادیم که بردار به دست آمده مجددا عضوی از Span است.

مثال ۵

حاصل جمع زیرفضا های داده شده را به دست آورید.

- $A = \{(۲,۳)\}, B = \{t(۳,۱) |\ t\ is\ scalar\}$
- $A = \{t_۱(۱,۲,۰) |\ t_۱\ is\ scalar\}, B = \{t_۲(۰,۱,۲) |\ t_۲\ is\ scalar\}$

- $A + B = \{t\ (۵,۴) \mid t\ is\ scalar\}$
- $A + B = \{\ (t_۱, ۲t_۱ + t_۲, ۲t_۲) \mid t_۱, t_۲\ are\ scalars\}$

قضیه ۷

اگر $W_1, ..., W_m$ زیر فضا هایی از فضای برداری V باشند، آنگاه نشان دهید $W_1 + ... + W_m$ نیز یک زیر فضا است.

می دانیم مجموعه $W_1 + ... + W_m$ مجموعه همه جمع های ممکن اعضای این زیر فضا ها می باشد.
با توجه به سه شرط یک زیر فضا در قضیه ۱ تلاش می کنیم اثبات کنیم:

- اگر بردار صفر را از هر زیر فضا برداریم و همه را جمع کنیم، بردار صفر را به دست می آوریم.
- دو بردار $u_1 + ... + u_m$ و $v_1 + ... + v_m$ درون مجموعه مورد نظر که اندیس هر بردار نشان دهنده زیر فضایی است که بردار را از آن برداشته ایم را در نظر می گیریم، جمع این دو بردار می شود $(u_1 + v_1) + ... + (u_m + v_m)$ و از آنجایی که هر یک از W_i ها یک زیر فضا است و جمع دو بردار دلخواه از آن، درونش قرار میگیرد پس هر $(u_i + v_i = t_i)$ مجددا درون زیر فضای W_i قرار می گیرد. بردار به دست آمده مجددا عضوی از $W_1 + ... + W_m$ خواهد بود زیرا جمع بردار های $t_i \in W_i$ طبق تعریف عضو مجموعه مورد نظر است.
- در این قسمت نیز مانند قسمت قبل بردار اولیه را $u_1+...+u_m$ در نظر میگیریم. با ضرب اسکالر دلخواه a در این بردار خواهیم داشت $a(u_1+...+u_m) =$ $a.u_1 + ... + a.u_m$ و از آنجایی که هر W_i یک زیر فضا است، $(a.u_i = v_i) \in W_i$. پس بردار به دست آمده $v_1 + ... + v_m$ است که طبق تعریف مجددا درون مجموعه $W_1 + ... + W_m$ قرار می گیرد.

مثال ۶

مشخص کنید آیا $U \oplus W$ وجود دارد یا خیر؟

(آ) $U = \begin{bmatrix} a \\ b \\ ۰ \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ c \end{bmatrix}$

(ب) $U = \begin{bmatrix} a \\ b \\ ۰ \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} ۰ \\ c \\ d \end{bmatrix}$

(آ) به ازای هر بردار دلخواه $\begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b و c به طور دقیق به دست می آید و در نتیجه بردار های u و v نیز به طور دقیق و یکتا مشخص می شوند. پس $direct\ sum$ وجود دارد.

(ب) به ازای هر بردار دلخواه $\begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \end{bmatrix}$ می دانیم که $v_۱ = a$ و $v_۳ = d$ است. اما $v_۲ = b + c$ خواهد بود، یعنی مقادیر دقیق و یکتایی برای b و c نخواهیم داشت. پس بردار های u و v به طور یکتا مشخص نخواهند شد و در نتیجه $direct\ sum$ نداریم.

قضیه ۸

اگر U و W زیر فضا هایی از فضای برداری V باشند، آنگاه $U \oplus W$ زیر فضا است اگر و تنها اگر $U \cap W = ۰$ باشد.

اگر $directsum$ وجود داشته باشد، آنگاه اشتراک U و W صفر است:
فرض می کنیم چنین نباشد، یعنی اشتراک این دو زیر فضا عضو غیر صفر c را داشته باشد، در این صورت $(c \in U + ۰ \in W) = (c \in W + ۰ \in U) = c$ که با تعریف $directsum$ متناقض است.
اگر اشتراک این دو زیر فضا صفر باشد، آنگاه $U \oplus W$ وجود دارد:
$c \in U + W$ را در نظر می گیریم، برای اینکه $directsum$ وجود نداشته باشد باید دو جمع از اعضای مختلف مجموعه های U و W حاصل c را تولید کنند:
$c = (u_۱ + w_۱) = (u_۲ + w_۲)$ در نتیجه $u_۱ - u_۲ = w_۲ - w_۱$. بنابراین از آنجایی که $(u_۱ - u_۲) \in U$ و $(w_۲ - w_۱) \in W$ است و این دو بردار برابر اند یعنی در اشتراک U و W قرار دارند. ولی می دانیم اشتراک این دو مجموعه فقط حاوی صفر است. پس $(u_۱ = u_۲) and (w_۱ = w_۲)$ و فرض نقض می شود.

مثال ۷

ثابت کنید مجموعه همه توابع کران دار، یک زیرفضا از فضای برداری همه تابع حقیقی است.

$$W = \{f(x) \mid \exists M \in R \; such \; that \; |f(x)| \leq M, \forall x \in R\}$$

- تابع $f(x) = ۰$ کران دار و کران آن صفر است.
- جمع دو تابع کران دار، کران دار است زیرا: $|f(x)| \leq M_۱ \;,\; |g(x)| \leq M_۲$. حال طبق نا مساوی مثلثی خواهیم داشت:

$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_۱ + M_۲$ بنابراین داریم: $|h(x)| \leq M_۱ + M_۲$ که در اینجا $h(x)$ همان تابع حاصل جمع است که مجددا کران دار و عضوی از زیرفضای درنظر گرفته شده است.

- اگر داشته باشیم $|f(x)| \leq M$. آنگاه با ضرب اسکالر دلخواه α در تابع $f(x)$ میخواهیم ثابت کنیم تابع به دست آمده نیز کران دار است:

$|\alpha f(x)| \leq |\alpha| \, |f(x)| \leq |\alpha| M$ پس تابع به دست آمده از ضرب اسکالر دلخواه در تابع قبلی نیز کران دار و کران آن $|\alpha| M$ خواهد بود.