به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۳

مقدار ویژه ها و بردار ویژه ها

تمرین تئوری پنجم

تاریخ انتشار: ۱۲ آذر ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۴ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

پرسش ۱ (۱۵ نمره)

ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را نرمال تعریف می‌کنیم اگر رابطه $A^TA = AA^T$ برقرار باشد. به ماتریس $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یکه می‌گوییم اگر معکوس آن با ترانهاده‌اش یکی باشد. دو ماتریس A و B مشابه‌اند اگر یک ماتریس معکوس پذیر P وجود داشته باشد بطوریکه $B = P^{-1}AP$ برقرار باشد.

(آ) نشان دهید دو ماتریس مشابه مقدار ویژه‌های یکسان دارند.

(ب) ثابت کنید A نرمال است، اگر و تنها اگر یک ماتریس یکه S وجود داشته باشد که S^TAS قطری باشد. می‌توانید از تجزیه Schur استفاده کنید.

(ج) اگر ماتریس A نرمال باشد و تمام مقدار ویژه‌هایش برابر c باشد، نشان دهید $A = cI$.

پرسش ۲ (۱۳ نمره)

اثبات کنید :

(آ) اگر $\lambda \neq 0$ مقدار ویژه A باشد، آنگاه $\frac{1}{\lambda}|A|$ مقدار ویژه ماتریس مجاورت A است.

(ب) اگر v بردار ویژه A باشد، آنگاه بردار ویژه $\operatorname{adj}(A)$ نیز هست.

پرسش ۳ (۱۴ نمره)

(آ) ثابت کنید:

$$||A - A_k||_2^2 = \sigma_{k+1}^2$$

(ب) فرض کنید A یک ماتریس $n \times d$ باشد. به ازای هر ماتریس B با رتبه حداکثر k ثابت کنید:

$$||A - A_k||_2 \leq ||A - B||_2$$

پرسش ۴ (۱۵ نمره) فرض کنید A, B به ترتیب ماتریس های $m\times n, n \times m$ باشند به طوری که $m \geq n$ نشان دهید:

$$|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda I_n - BA|$$

سپس نتیجه بگیرید AB, BA مقادیر ویژه ناصفر یکسانی دارند.

پرسش ۵ (۱۴ نمره) دو فرم درجه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$Q_i(x) = (x - a_i)^T A_i(x - a_i) + c_i, \quad i = 1, 2$$

که در آن $x, a_i \in \mathbb{R}^n$، A_i ماتریس‌های مثبت معین، و $c_i \in \mathbb{R}$ هستند. اگر تعریف کنیم $Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x)$، می‌توان نوشت:

$$Q(x) = (x - a)^T A(x - a) + c, \quad A = A_1 + A_2$$

(آ) نشان دهید که $A = A_1 + A_2$.

(ب) a را بر حسب a_1، a_2، A_1، و A_2 پیدا کنید.

(ج) مقدار c را بر حسب c_1، c_2، a_1، a_2، A_1، و A_2 به دست آورید.

پرسش ۶ (۱۴ نمره) اگر $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r$ مقادیر ویژه متمایز ماتریس متقارن حقیقی $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ باشند:

(آ) نشان دهید که فرم درجه دوم متناظر با A برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ نامساوی‌های زیر را ارضا می‌کند:

$$\lambda_r\|x\|^2 \leq q(x) \leq \lambda_1\|x\|^2$$

(ب) ثابت کنید که مقادیر حداکثر و حداقل $q(x)$ بر روی کره واحد در $\mathbb{R}^n$ به ترتیب برابر با λ_1 و λ_r هستند.

پرسش ۷ (۱۵ نمره)

فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (با در نظر گرفتن چندگانگی) باشد. همچنین $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ یک چندجمله‌ای باشد و $g(A)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$g(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k,$$

که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است.

اثبات کنید: مقادیر ویژه $g(A)$ برابرند با $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_n)$.