به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
زمستان ۱۴۰۳

فضای نرم، مشتق و هسین، کمترین مربّعات

تمرین تئوری ششم

تاریخ انتشار: ۱۳ دی ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** برای این تمرین، امکان ارسال با تاخیر وجود **ندارد**.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

پرسش ۱ (۱۸ نمره) در این مسئله تمامی متغیرهایی که با حرف بزرگ لاتین مشخص شده‌اند، نشان‌دهنده ماتریس هستند. همچنین منظور از $\|\cdot\|_F$ نرم فروبنیوس می‌باشد.

(آ) مشتق تابع زیر را به‌دست بیاورید:

$$f(X) = \|AX - B\|_F^2$$
$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = ?$$

(ب) درستی عبارات زیر را نشان دهید:

i.
$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

ii.
$$\|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$$

دقت کنید که داریم:

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sigma_{\max}(A)$$

پرسش ۲ (۱۸ نمره) یکی از کاربرد های تجزیه مقدار تکین ، محاسبه تقریب رتبه پایین یک ماتریس است. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ با رتبه r را با تجزیه مقادیر تکین $A = U\Sigma V^T$ در نظر بگیرید. به ازای یک عدد $k \leq r$ ، ماتریس A_k را به صورت $A_k = U_k \Sigma_k V_k^T$ تعریف می کنیم که در آن U_k و V_k به ترتیب k ستون اول U و V بوده و Σ_k بلوک $k \times k$ بالا و سمت چپ ماتریس Σ است که شامل k مقدار تکین بزرگ A می شود. به عبارتی می توان A_k را به صورت $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$ بیان کرد که ماتریسی رتبه k است.

الف) نشان دهید A_k پاسخ مسئله بهینه سازی زیر است.

$$\min_{X\ ,\ rank(X)\leq k} ||A - X||_F$$

ب) نشان دهید A_k پاسخ مسئله بهینه سازی زیر نیز می باشد.

$$\min_{X\ ,\ rank(X)\leq k} ||A - X||_2$$

راهنمایی : در هر دو مسئله باید نشان دهید

$$\forall X, rank(X) \leq k : ||A - A_k|| \leq ||A - X||$$

پرسش ۳ (۱۷ نمره) فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ و x برداری از $\mathbb{R}^n$ باشد. مقادیر زیر را بیابید:

(آ)
$$\frac{\partial (x^T A x)}{\partial x}$$

(ب) اگر درایه‌های ماتریس A تابعی از یک اسکالر β باشند، مقدار زیر را محاسبه کنید:

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial \beta}.$$

پرسش ۴ (۱۵ نمره) در بسیاری از مسائل حداقل مربعات غیر خطی تابع باقیمانده به این صورت است :

$$f_i(x) = \Phi_i(a_i^T x - b_i), \quad i = 1, \cdots, m$$

$$a_i \in \mathbb{R}^n \ \ , \ \ b_i \in \mathbb{R} \ \ , \ \ \Phi_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

در این حالت تابع هدف حداقل مربعات غیر خطی به این فرم است:

$$||f(x)||^2 = \sum_{i=1}^{m} (\Phi_i(a_i^T x - b_i))^2$$

یک ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ تعریف می کنیم که سطر های آن $a_1^T, \cdots, a_m^T$ را داشته باشد. همچنین یک بردار $b \in \mathbb{R}^m$ تعریف می کنیم.
نشان دهید مشتق تابع به فرم زیر است :

$$Df(x) = diag(d)A$$
$$d_i = \Phi_i'(r_i) \;\; , \;\; r = Ax - b$$

پرسش ۵ (۱۶ نمره) کمینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \|\mathbf{x}\|_2$$
$$\text{subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

به وضوح عبارت زیر در شرط مسئله صدق میکند:

$$x_0 = A^T(AA^T)^{-1}\mathbf{y}.$$

(آ) اثبات کنید که هر جوابی برای $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ به صورت زیر قابل نمایش است:

$$x = x_0 + \mathbf{w},$$

که $\mathbf{w}$ در $N(A)$ قرار دارد.

(ب) به کمک بخش قبل نشان دهید $\mathbf{w} \perp x_0$.

(ج) به کمک بخش قبل نشان دهید x_0 کوچک ترین جواب و به عبارتی همان خواسته مسئله است.

(د) حال سعی کنید با ضرایب لاگرانژ x_0 را استخراج کنید.

(ه) حال مسئله را به شکل زیر تغییر دهید:

$$J(\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_2^2.$$

این مسئله به Regularized Least Squares (RLS) معروف است. به طور کلی Regularization روشی است که برای جلوگیری از overfitting در مسائل بهینه‌سازی به کار می‌رود. این تکنیک با اضافه کردن یک جمله‌ی پنالتی به تابع هدف، پیچیدگی مدل را کاهش می‌دهد و تعادل بین برازش داده‌ها و ساده‌سازی مدل را حفظ می‌کند. در اینجا، مسئله‌ی RLS با اضافه کردن نرم ۲ متغیر هدف به تابع هزینه تعریف می‌شود. جواب آن را با استفاده از مشتق گیری به دست آورید و رابطه‌ی آن را با مسئله اولیه بنویسید.

پرسش ۶ (۱۶ نمره)
فرض کنید مسئله کمترین مربعات به فرم زیر داده شده است:

$$\min_x \left(\|Ax - b\|_2^2 + c^T x + d\right),$$

که در آن:

- A یک ماتریس $m \times n$،
- b برداری در $\mathbb{R}^m$،
- c برداری در $\mathbb{R}^n$،
- و d یک اسکالر است.

(آ) این مسئله را به فرم استاندارد کمترین مربعات ($\min_x \|Tx - v\|$) تبدیل کنید.

(ب) مسئله تبدیل‌شده را حل کرده و مقدار بهینه x را به دست آورید.