به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۳

دستگاه مختصات، فضای برداری و زیرفضاها

تمرین تئوری دوم

تاریخ انتشار: ۱ مهر ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

پرسش ۱ (۱۵ نمره) فرض کنید v, w دو عضو از فضای برداری V هستند. نشان دهید $\{v, w\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر $\{v + w, v - w\}$ مستقل خطی باشد.

پاسخ اگر $\{v, w\}$ مستقل خطی باشد و داشته باشیم:

$$c_۱(v + w) + c_۲(v - m) = ۰$$

آنگاه:

$$(c_۱ + c_۲)v + (c_۱ - c_۲)w = ۰$$

از آنجایی که $\{v, w\}$ مستقل خطی است، پس باید ضرایب معادله بالا صفر باشند:

$$c_۱ + c_۲ = ۰, c_۱ - c_۲ = ۰ \Longrightarrow c_۱ = c_۲ = ۰$$

و بدین ترتیب استقلال خطی $\{v + w, v - w\}$ نتیجه می شود.
حال برای طرف دیگر فرض کنید $\{v + w, v - w\}$ مستقل خطی است و:

$$c_۱v + c_۲w = ۰(*)$$

v و w را می توان به صورت ترکیب خطی $v + w$ و $v - w$ نوشت:

$$v = \tfrac{۱}{۲}(v + w) + \tfrac{۱}{۲}(v - w)$$
$$w = \tfrac{۱}{۲}(v + w) - \tfrac{۱}{۲}(v - w)$$

بنابراین معادله * را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\tfrac{۱}{۲}c_۱((v + w) + (v - w)) + \tfrac{۱}{۲}c_۲((v + w) - (v - w)) = ۰$$
$$(c_۱ + c_۲)(v + w) + (c_۱ - c_۲)(v - w) = ۰$$

چون $\{v + w, v - w\}$ مستقل خطی است:

$$c_۱ + c_۲ = ۰, c_۱ - c_۲ = ۰ \Longrightarrow c_۱ = c_۲ = ۰$$

در نتیجه استقلال خطی $\{v, w\}$ نیز ثابت می شود.

پرسش ۲ (۱۷ نمره) ماتریس $A_{m\times n}$ را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱,۱} & a_{۱,۲} & \cdots & a_{۱,n} \\ a_{۲,۱} & a_{۲,۲} & \cdots & a_{۲,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,۱} & a_{m,۲} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

می‌دانیم $n \geq m$. هم‌چنین داریم:

$$\forall i \in \{۱, ۲, ۳, ..., m\} : ۲|a_{ii}| > \sum_{j=۱}^{m} |a_{ji}|$$

آیا سطرهای A لزوما مستقل خطی‌اند؟ اگر فکر می‌کنید پاسخ مثبت است، اثبات کنید و در غیر این صورت، مثال نقض بیاورید.

پاسخ استقلال خطی سطرهای A را اثبات می‌کنیم.
نامساوی داده شده در صورت سوال معادل این است که قدرمطلق درایه a_{ii}، بزرگتر از جمع قدرمطلق سایر مقادیر روی ستون iام است. (کافی است $|a_{ii}|$ را از طرفین حذف کنیم.)

حال می‌توان نوشت:

$$c_۱ * (\text{row ۱}) + c_۲ * (\text{row ۲}) + ... + c_n * (\text{row n}) = ۰$$

$$\rightarrow$$

$$c_1(a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,n}) + c_2(a_{2,1}, a_{2,2}, ..., a_{2,n}) + ... + c_m(a_{m,1}, a_{m,2}, ..., a_{m,n}) = (0, 0, ..., 0)$$

فرض می‌کنیم تعدادی از c_iها غیرصفر باشند (فرض خلف). فرض می کنیم بزرگترین آن‌ها (از نظر قدرمطلقی) c_j باشد ($1 \leq j \leq m$).

در این صورت با برابر قرار دادن درایه jام طرفین داریم:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,j} = 0 \Rightarrow \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} c_i a_{i,j} = -c_j a_{jj}$$

$$\xrightarrow{c_j \neq 0}$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} -\frac{c_i a_{i,j}}{c_j} = a_{jj}$$

$$\xrightarrow{\text{Taking absolute value of both sides}}$$

$$|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} -\frac{c_i a_{i,j}}{c_j}| = |a_{jj}|$$

براساس نامساوی مثلثی داریم:

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} |-\frac{c_i a_{i,j}}{c_j}| \geq |\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} -\frac{c_i a_{i,j}}{c_j}|$$

براساس **پرسش ۲** داریم:

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} |\frac{c_i}{c_j}||a_{i,j}| \geq |a_{j,j}|$$

پس طبق فرض سوال:

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} |\frac{c_i}{c_j}||a_{i,j}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} |a_{i,j}| \Rightarrow \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} (|\frac{c_i}{c_j}| - 1)|a_{i,j}| > 0$$

ما c_j را بزرگترین مقدار از نظر قدرمطلق بین همه مقادیر c در نظر گرفته بودیم. پس حاصل $|\frac{c_i}{c_j}|$ برای هر $i \neq j$ در بازه $[0, 1]$ قرار دارد. پس $0 \leq 1 - |\frac{c_i}{c_j}| \leq -1$ است. بنابراین $(|\frac{c_i}{c_j}| - 1)|a_{i,j}|$ نامثبت است و می‌دانیم جمع چند عبارت نامثبت نمی‌تواند مثبت شود. به تناقض رسیدیم و درستی حکم اثبات می‌شود.

پرسش ۳ (۱۶ نمره) برای هر یک از فضاهای برداری زیر، ابتدا پایه[1] ای برای آن بیابید و سپس بعد[2] آن فضا را محاسبه نمایید.

الف) چند جمله ای های درجه n به فرم $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ که در آن به ازای عدد k $(k < n)$ داریم: $p(1) = p(2) = \cdots = p(k) = 0$.

ب) تمام ماتریس های مربعی بالامثلثی متعلق به $\mathbb{R}^{n\times n}$.

پاسخ

(آ) از آنجایی که $p(x)$ در نقاط ۱ تا k صفر است، می توان نتیجه گرفت که به فرمت زیر می باشد:

$$p(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-k)(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-k}x^{n-k})$$

که $a_0, a_1, \ldots a_{n-k}$ در آن ضرایبی ثابت هستند. بنابراین، مجموعه چند جمله‌ای های

[1] $basis$
[2] $dimension$

$$p_1(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-k)$$
$$p_2(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-k)x$$
$$\vdots$$
$$p_{n-k+1}(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-k)x^{n-k}$$

تشکیل یک پایه می دهند. بعد این پایه هم $n-k+1$ می باشد.

(ب) ماتریس های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

اگر این رویه را برای هر سطر تکرار کنیم (البته به ازای درایه هایی که شماره سطر آنها کمتر مساوی با شماره ستون است) ، مجموعه ای از ماتریس های مستقل ایجاد می شود که کل فضای ماتریس های بالامثلثی را در بر می گیرند. به عبارت دیگر، ماتریس E_{ij} جزو پایه است اگر تنها درایه e_{ij} آن یک باشد و داشته باشیم: $i \leq j$

بنابراین بعد این فضا از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

پرسش ۴ (۱۶ نمره) زیرفضای V را در فضای برداری $\mathbb{R}^4$ درنظر بگیرید که توسط دستگاه زیر ساخته می شود :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y + 3t = 0 \end{cases}$$

زیرفضای W نیز با بردارهای زیر ساخته می شود:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\dim(V+W)$ و $\dim(V \cap W)$ را محاسبه کنید.

پاسخ دو برداری که زیرفضای W را پدید می آورند، مستقل خطی هستند، بنابراین $dim(W) = 2$.

همچنین داریم: $dim(V) = 2$؛ چراکه می توان x و y را به طور دلخواه انتخاب کرد و z و t نیز به صورت یکتا مشخص می شوند.

$W \not\subseteq V$ چون به طور مثال $w_1 \notin V$. (مجموعه جواب $x = 2, y = 0, z = 1, t = 1$ در زیرفضای V وجود ندارد.)

درنتیجه $dim(V \cap W) < dim(W)$ که یعنی $dim(V \cap W)$ یا یک است یا صفر.

برای بررسی فضای اشتراک، باید بررسی کنیم که آیا ترکیب خطی از w_1 و w_2 در فضای V وجود دارد یا خیر:

$$a \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + 3b \\ -2b \\ a - 2b \\ a \end{bmatrix} \tag{1}$$

اگر این بردار در V باشد، با توجه به تعریف فضای V دستگاه زیر باید جواب داشته باشد:

$$\begin{cases} (2a+3b) + 2(-2b) + (a-2b) = 0 \\ -(2a+3b) - (-2b) + 3a = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3a - 3b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

که معادل $a = b$ است. به عبارت دیگر، هر مجموعه برداری به فرم (۱) که در آن $a = b$، عضو $V \cap W$ است. به طور خاص، اگر $a = b = ۱$، به بردار $\begin{bmatrix} ۵ \\ -۲ \\ -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ می رسیم که برداری مخالف صفر است و به $V \cap W$ تعلق دارد، پس $dim(V \cap W) \geq ۱$. از طرفی قبلا نتیجه گرفتیم $dim(V \cap W) \leq ۱$. پس بعد فضای اشتراک V و W، یک است.

در نهایت داریم:

$$dim(V + W) = dim(V) + dim(W) - dim(V \cap W) = ۲ + ۲ - ۱ = ۳$$

پرسش ۵ (۱۶ نمره) فرض کنید ماتریس‌های $A_{m\times n}$ و $B_{m\times k}$ موجود باشند. گزاره زیر را اثبات یا رد کنید:

ماتریسی مانند X وجود دارد به طوری که $AX = B$، اگر و تنها اگر $Rank(A) = Rank(A \vdots B)$ (منظور از $A \vdots B$ ماتریس افزوده[۳] A و B است).

پاسخ گزاره داده شده را اثبات می‌کنیم.

ستون iام ماتریس‌های B, X, A را به ترتیب با B_i, X_i, A_i نشان می‌دهیم.

فرض می‌کنیم Xای موجود باشد به طوری که $AX = B$. ستون iام B از ضرب A در ستون iام X حاصل می‌شود. یعنی:

$$AX_i = B_i$$

از طرفی AX_i یک ترکیب خطی از ستون‌های A است (با ضرایب موجود در X_i). پس هر ستون ماتریس B یک ترکیب خطی از ستون‌های A است. بنابراین اگر ماتریس B را به ماتریس A بچسبانیم (ماتریس افزوده) و فضای ستونی ماتریس حاصل را در نظر بگیریم، با فضای ستونی ماتریس A تفاوتی ندارد. یعنی:

$$Im(A) = Im(A \vdots B) \Rightarrow Dim(Im(A)) = Dim(Im(A \vdots B)) \Rightarrow Rank(A) = Rank(A \vdots B)$$

حال فرض می‌کنیم $Rank(A) = Rank(A \vdots B) = r$. پایه‌ای مانند $u_۱, u_۲, ..., u_r$ برای فضای ستونی ماتریس A در نظر می‌گیریم.
اثبات می‌کنیم هر B_i را می توان به صورت ترکیب خطی‌ای از $u_۱, u_۲, ..., u_r$ نوشت.
از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم این‌طور نباشد. در این صورت $u_۱, u_۲, ..., u_r, B_i$ مستقل خطی‌اند. یعنی:

$$c_۱u_۱ + c_۲u_۲ + ... + c_ru_r + \alpha B_i = ۰ \Rightarrow c_۱ = c_۲ = ... = c_r = \alpha = ۰$$

زیرا اگر $\alpha \neq ۰$، می‌توان B_i را برحسب $u_۱, u_۲, ..., u_r$ نوشت که خلاف فرض خلف است. با جایگذاری $\alpha = ۰$ در عبارت (**پرسش ۵**) به معادله $\sum_{i=۱}^{r} c_iu_i = ۰$ می‌رسیم. چون $u_۱, u_۲, ..., u_r$ یک پایه تشکیل می‌دهند، مستقل خطی هستند و $c_۱ = c_۲ = ... = c_r = ۰$. بنابراین $c_۱ = c_۲ = ... = c_r = \alpha = ۰$.

حال اگر بردارهای $u_۱, u_۲, ..., u_r, B_i$ مستقل خطی باشند، می‌توان نتیجه گرفت که $Rank(A \vdots B) \geq Rank(A) + ۱$ که تناقض است. پس ثابت می‌شود که هر B_i را می‌توان به صورت ترکیب خطی‌ای از $u_۱, u_۲, ..., u_r$ نوشت. چون $u_۱, u_۲, ..., u_r$ یک پایه برای فضای ستونی A است، هر B_i را می‌توان به صورت ترکیب خطی‌ای از $A_۱, A_۲, ..., A_n$ نوشت.

فرض می‌کنیم $B_i = c_{i۱}A_۱ + c_{i۲}A_۲ + ... + c_{in}A_n$. در این صورت ماتریس X که ستون iام آن به صورت $\begin{bmatrix} c_{i۱} \\ c_{i۲} \\ \vdots \\ c_{in} \end{bmatrix}$ تعریف می‌شود، در رابطه $AX = B$ صدق می‌کند.

[۳] $augmented\ matrix$