به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۳

فضای ضرب داخلی،نامساوی ها و گرام اشمیت | **تمرین تئوری سوم** | تاریخ انتشار: ۳آبان ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۴ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

پرسش ۱ (۱۵ نمره) فرض کنید V یک فضای برداری از چند جمله‌ای‌ها با حداکثر درجه n باشد. دو عضو A و B از این فضای برداری را در نظر بگیرید به طوری که

$$A = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{و} \quad B = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

ثابت کنید عملگر

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} \frac{a_i b_j}{i + j + 1}$$

یک ضرب داخلی بر روی V است.

پاسخ مطابق با اسلایدها می‌دانیم که $\int_0^1 A(x)B(x)dx$ یک ضرب داخلی است. (این نکته را می‌توان با بررسی ویژگی‌های ضرب داخلی اثبات کرد.)
حال داریم:

$$\int_0^1 A(x)B(x)dx = \int_0^1 \left(\sum_i a_i x^i \right) \left(\sum_j b_j x^j \right) dx = \sum_{i,j} \left[\int_0^1 a_i b_j x^{i+j} \, dx \right] = \sum_{i,j} \frac{a_i b_j}{i + j + 1}$$

پرسش ۲ (۱۷ نمره) می‌دانیم به وسیله الگوریتم Gram–Schmidt می‌توان ماتریس A را به صورت تجزیه $A = QR$ نوشت.

(آ) فرض کنید ماتریس A فول رنک و مربعی باشد. اثبات کنید در این حالت ماتریس R یک ماتریس بالامثلثی و وارون‌پذیر می‌شود.

(ب) برای مثال، ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید. تجزیه $A = QR$ را به دست آورده و به وسیله آن پاسخ دستگاه معادلات $Ax = b$ که در آن b برابر با بردار

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

است را به دست آورید.

(ج) در حالت کلی، اثبات کنید رنک ماتریس A برابر با تعداد سطرهای ناصفر در R است.

(د) Pivot های ماتریس $A^T A$ را به دست آورده و ارتباط آن با درایه های قطر اصلی ماتریس R را توضیح دهید. ادعای خود را اثبات کنید.

پاسخ

الف) قضیه:

$$\text{rank}(AB) \leq \min\left(\text{rank}(A), \text{rank}(B)\right)$$

مطابق با قضیه بالا داریم:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(QR) \leq \text{rank}(R)$$

از طرف دیگر می توان نوشت:

$$R = Q^T A \Longrightarrow \text{rank}(R) = \text{rank}(Q^T A) \leq \text{rank}(A)$$

از نامساوی های بالا نتیجه می شود:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(R)$$

حال دقت کنید که برای هر $k > i$، می دانیم:

$$r_{ik} = \langle a_k, q_i \rangle$$

و برای $i = k$ داریم:

$$r_{ik} = \left\| a_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} q_j \right\|$$

برای $i > k$ داریم:

$$r_{ik} = 0$$

چرا که

$$a_k = r_{۱k}q_۱ + r_{۲k}q_۲ + \cdots + r_{kk}q_k$$

و در نتیجه برای $i > k$ خواهیم داشت:

$$r_{ik} = q_i^T a_k = \langle a_k, q_i \rangle = \sum_{j=۱}^{k} r_{jk}\langle q_j, q_i \rangle = ۰$$

ب)

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۶۶}}{۶۶} & \frac{۳\sqrt{۱۱}}{۱۱} & \frac{\sqrt{۶}}{۶} \\ \frac{۲\sqrt{۶۶}}{۳۳} & \frac{\sqrt{۱۱}}{۱۱} & -\frac{\sqrt{۶}}{۳} \\ \frac{۷\sqrt{۶۶}}{۶۶} & -\frac{\sqrt{۱۱}}{۱۱} & \frac{\sqrt{۶}}{۶} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{۶۶} & \frac{۱۳\sqrt{۶۶}}{۱۱} & \frac{۹۷\sqrt{۶۶}}{۶۶} \\ ۰ & \frac{۳\sqrt{۱۱}}{۱۱} & \frac{۵\sqrt{۱۱}}{۱۱} \\ ۰ & ۰ & \frac{\sqrt{۶}}{۶} \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Longrightarrow QRx = b \Longrightarrow Rx = Q^T b$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{۶۶} & \frac{۱۳\sqrt{۶۶}}{۱۱} & \frac{۹۷\sqrt{۶۶}}{۶۶} \\ ۰ & \frac{۳\sqrt{۱۱}}{۱۱} & \frac{۵\sqrt{۱۱}}{۱۱} \\ ۰ & ۰ & \frac{\sqrt{۶}}{۶} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۶۶}}{۶۶} & \frac{۳\sqrt{۱۱}}{۱۱} & \frac{\sqrt{۶}}{۶} \\ \frac{۲\sqrt{۶۶}}{۳۳} & \frac{\sqrt{۱۱}}{۱۱} & -\frac{\sqrt{۶}}{۳} \\ \frac{۷\sqrt{۶۶}}{۶۶} & -\frac{\sqrt{۱۱}}{۱۱} & \frac{\sqrt{۶}}{۶} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{۶۶} & \frac{۱۳\sqrt{۶۶}}{۱۱} & \frac{۹۷\sqrt{۶۶}}{۶۶} \\ ۰ & \frac{۳\sqrt{۱۱}}{۱۱} & \frac{۵\sqrt{۱۱}}{۱۱} \\ ۰ & ۰ & \frac{\sqrt{۶}}{۶} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۶۹ \\ ۰/۶۰۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow x_۳ = ۰ \Longrightarrow x_۲ = \frac{۲}{۳} \Longrightarrow x_۱ = -\frac{۱}{۳}$$

ج) در قسمت الف نشان دادیم $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(R)$ و چون ماتریس R بالامثلثی است، تعداد سطر های ناصفر آن برابر رتبه اش می باشد.

د) ماتریس A^TA یک ماتریس متقارن است و در نتیجه فرم LDU آن به شکل LDL^T می شود. دقت کنید در این تجزیه، ماتریس D یک ماتریس قطری است که روی درایه های آن $pivot$ های A^TA نوشته شده است.

$$A^TA = (QR)^T(QR) = R^TQ^TQR = R^TR = LDL^T = (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^T$$

$$\Longrightarrow R^T = L\sqrt{D}$$

پس $pivot$ های ماتریس A برابر با مربع درایه های قطر اصلی R هستند.

پرسش ۳ (۱۶ نمره)

در نظر بگیرید که $u, v \in V$ حالا ثابت کنید که $< u, v >= ۰$ اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha \in F$ داشته باشیم : $||u|| \leq ||u + \alpha v||$

پاسخ

$$if\; u^Tv = ۰ \to \|u + \alpha v\|_۲^۲ = u^Tu + \alpha^۲ v^Tv + ۲\alpha u^Tv = \|u\|_۲^۲ + \|\alpha u\|_۲^۲ \to \|u\|_۲^۲ \leq \|u + \alpha v\|_۲^۲$$

$$if \|u\|_۲^۲ \leq \|u + \alpha v\|_۲^۲ \to u^Tu \leq u^Tu + ۲\alpha u^Tv + \alpha^۲ v^Tv \to ۰ \leq ۲\alpha u^Tv + \alpha^۲ v^Tv \to \alpha(\alpha + \frac{۲u^Tv}{v^Tv} \geq ۰$$

می دانیم که اگر $۰ \neq \frac{۲u^Tv}{v^Tv}$ آنگاه در بازه ی بین ۰ و $\frac{-۲u^Tv}{v^Tv}$ حاصلضرب این دو مورد منفی است پس تنها حالتی که این نامساوی می تواند برقرار باشد این است که $\frac{۲u^Tv}{v^Tv}$ برابر صفر باشد یعنی داشته باشیم که

$$\frac{-۲u^Tv}{v^Tv} = ۰ \to ۲u^Tv = ۰ \to u^Tv = ۰ \to < u, v >= ۰$$

پرسش ۴ (۱۶ نمره) اگر ماتریس A را بتوان به صورت R^TR نوشت آنگاه نشان دهید که به ازای هر بردار x, y داریم که :

$$|x^TAy|^۲ \;\leq\; (x^TAx)(y^TAy)$$

پاسخ اگر داشته باشیم $A = R^TR$ آنگاه داریم که

$$|x^TAy|^۲ \;\leq\; (x^TAx)(y^TAy) \iff (x^TR^TRy)^۲ \leq (x^TR^TRx)(y^TR^TRy)\; u = Rx, v = Rv \iff (u^Tv)^۲ \leq (u^Tu)(v^Tv)$$

که طبق نامساوی کوشی شوارتز درست است.

پرسش ۵ (۱۶ نمره) اگر $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ، به ازای $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ تعریف می کنیم $< A, B >= tr(A^T B)$. آیا این تعریف درستی از یک ضرب داخلی در V است؟

پاسخ

برای اثبات، باید ۳ خاصیت **Definite Positive**، **Symmetry** و **Bilinearity** بررسی شوند.

خاصیت Bilinearity :

فرض می‌کنیم $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و $A_1, A_2, B \in M$. داریم:

$$\begin{aligned}\langle \lambda A_1 + \mu A_2, B\rangle &= \text{tr}((\lambda A_1 + \mu A_2)^T B)\\ &= \text{tr}(\lambda A_1^T B + \mu A_2^T B)\\ &= \lambda \text{tr}(A_1^T B) + \mu \text{tr}(A_2^T B)\\ &= \lambda\langle A_1, B\rangle + \mu\langle A_2, B\rangle\end{aligned}$$

خاصیت Symmetry :

برای هر $A, B \in M$، داریم:

$$\langle A, B\rangle = \text{tr}(A^T B) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(B^T A) = \langle B, A\rangle$$

خاصیت Positive Definite :

برای هر $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$، فرض می‌کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}\langle A, A\rangle = \text{tr}(A^T A) &= \text{tr}\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0\end{aligned}$$

تنها در شرایطی که $A = 0$ است، ضرب داخلی صفر می شود و این خاصیت هم برقرار است.

پرسش ۶ (۲۰ نمره) فرض کنید N, M زیرفضاهایی از فضای ضرب داخلی باشند. ثابت کنید که:

$$N^\perp \cap M^\perp = (M + N)^\perp$$

پاسخ

ابتدا فرض میکنیم که $v \in (M + N)^\perp$ پس v بر هر برداری در $M + N$ متعامد است و از آنجایی که هر برداری در M و N خود از زیر فضایی از $M + N$ که M و N باشند می آید پس v بر هر برداری در M و N هم عمود است پس:

$$v \in M^\perp \text{ و } v \in N^\perp$$

پس داریم:

(۱)

$$(M + N)^\perp \subseteq M^\perp \cap N^\perp$$

حالا فرض میکنیم $v \in M^\perp \cap N^\perp$ پس v بر هر برداری از M و N متعامد است اگر $u \in M + N$ را در نظر بگیریم بطوری که $u = m + n$ که $m \in M$ و $n \in N$ که از آنجایی که v بر هر دوی آنها عمود است پس :

$$\langle v, m\rangle = 0 \text{ و } \langle v, n\rangle = 0$$

پس داریم:

$$\langle v, u\rangle = \langle v, m + n\rangle = \langle v, m\rangle + \langle v, n\rangle = 0 + 0 = 0$$

که نشان می دهد v بر هر برداری در $M + N$ عمود است پس در نتیجه :

(۲)

$$M^\perp \cap N^\perp \subseteq (M + N)^\perp$$

از ۱ و ۲ نتیجه میگیریم :

$$(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$$