به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
پاییز ۱۴۰۳

مقدار ویژه ها و بردار ویژه ها

تمرین تئوری پنجم

تاریخ انتشار: ۶آذر ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۴ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

پرسش ۱ (۱۵ نمره)

ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را نرمال تعریف می‌کنیم اگر رابطه $A^TA = AA^T$ برقرار باشد. به ماتریس $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یکه می‌گوییم اگر معکوس آن با ترانهاده‌اش یکی باشد. دو ماتریس A و B مشابه‌اند اگر یک ماتریس معکوس پذیر P وجود داشته باشد بطوریکه $B = P^{-۱}AP$ برقرار باشد.

(آ) نشان دهید دو ماتریس مشابه مقدار ویژه‌های یکسان دارند.

(ب) ثابت کنید A نرمال است، اگر و تنها اگر یک ماتریس یکه S وجود داشته باشد که S^TAS قطری باشد. می‌توانید از تجزیه Schur استفاده کنید.

(ج) اگر ماتریس A نرمال باشد و تمام مقدار ویژه‌هایش برابر c باشد، نشان دهید $A = cI$.

پاسخ

(آ) اگر λ مقدار ویژه B باشد، داریم:

$$Bv = \lambda v = P^{-۱}APv \Rightarrow \lambda Pv = APv$$

پس اگر برای این مقدار ویژه، برای B بردارویژه v باشد، برای A با همین مقدار ویژه بردار ویژه Pv پیدا می‌شود. بطور مشابه اگر u بردار ویژه A باشد، با همان مقدار ویژه می‌توان بردار ویژه $P^{-۱}u$ برای B پیدا کرد. پس مقدار ویژه‌های این دو ماتریس برابر است.

(ب) طبق تجزیه Schur می‌توانیم برای هر ماتریس A بنویسیم:

$$A = QUQ^T$$

بطوریکه U بالا مثلثی و Q یکه است. اگر A نرمال باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned}
A^TA &= (QUQ^T)^T(QUQ^T) = QU^TQ^TQUQ^T = QU^TUQ^T \\
AA^T &= (QUQ^T)(QUQ^T)^T = QUQ^TQU^TQ^T = QUU^TQ^T \\
&\Rightarrow A^TA = AA^T = QU^TUQ^T = QUU^TQ^T \\
&\Rightarrow U^TU = UU^T
\end{aligned}$$

برای اینکه اثبات کنیم U قطری هست باید نشان دهیم برای هر $j \neq i$ داریم $U_{ij} = ۰$. می‌دانیم برای هر $k < i$ داریم $U_{ik} = ۰$.

$$\begin{aligned}
(U^TU)_{ii} &= \sum_{k=۱}^{n} U_{ki}U_{ki} = \sum_{k=۱}^{i} U_{ki}U_{ki} \\
(UU^T)_{ii} &= \sum_{k=۱}^{n} U_{ik}U_{ik} = \sum_{k=i}^{n} U_{ik}U_{ik}
\end{aligned}$$

با استقرا نشان می‌دهیم برای هر $i < k$ داریم $U_{ik} = ۰$. برای $i = ۱$ داریم:

$$U_{۱۱}^۲ = \sum_{i=۱}^{n} U_{۱k}^۲$$

فرض کنید برای هر $j < i$ می‌دانیم به ازای هر $k > j$ خانه U_{jk} برابر صفر است. اکنون می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=۱}^{i} U_{ki}^۲ &= \sum_{k=i}^{n} U_{ik}^۲ \\
U_{ii}^۲ &= \sum_{k=i}^{n} U_{ik}^۲
\end{aligned}$$

پس اثبات شد که برای هر $k > i$ نیز باید $U_{ik} = ۰$ باشد. پس حکم استقرا اثبات شد و می‌توان گفت U قطری است. همچنین S در صورت سوال برابر Q^T در اینجاست.

حال فرض کنید $S^TAS = D$ که D قطری است. می‌توان گفت $A = SDS^T$ پس:

$$\begin{aligned}
AA^T &= (SDS^T)(SDS^T)^T = SDS^TSD^TS^T = SDD^TS^T \\
A^TA &= (SDS^T)^T(SDS^T) = SD^TS^TSDS^T = SD^TDS^T
\end{aligned}$$

چون D قطری است، دو عبارت بالا باهم برابرند، پس A نرمال است.

(ج) طبق بخش ب می‌توان گفت $D = S^TAS$ و طبق بخش مقدار ویژه‌های A و D برابر است. چون مقدار ویژه‌های یک ماتریس قطری همان مقادیر روی قطرش است، ماتریس $D = cI$ است.

$$cI = S^TAS \Rightarrow S(cI)S^T = A = cS^TS \Rightarrow A = cI$$

پرسش ۲ (۱۳ نمره)

اثبات کنید :

(آ) اگر $\lambda \neq 0$ مقدار ویژه A باشد، آنگاه $\frac{1}{\lambda}|A|$ مقدار ویژه ماتریس مجاورت A است.

(ب) اگر v بردار ویژه A باشد، آنگاه بردار ویژه $\text{adj}(A)$ نیز هست.

پاسخ

(آ) می‌دانیم $\text{adj}(A)A = |A|I$. پس:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ \Rightarrow \text{adj}(A)Av &= \lambda \text{adj}(A)v \\ \Rightarrow |A|v &= \lambda \text{adj}(A)v \\ \Rightarrow \frac{1}{\lambda}|A|v &= \text{adj}(A)v \end{aligned}$$

پس برای ماتریس مجاورت $\text{adj}(A)$ مقدار ویژه $\frac{1}{\lambda}|A|$ وجود دارد.

(ب) طبق پاسخ بخش آ اگر $Av = \lambda v$ باشد و $\lambda \neq 0$ آنگاه v بردار ویژه $\text{adj}(A)$ نیز هست. پس کافیست تنها برای $\lambda = 0$ اثبات کنیم.
اگر $rank(A) \leq n - 2$ آنگاه $\text{adj}(A) = 0$ پس $\text{adj}(A)v = 0$. اگر $rank(A) = n - 1$ آنگاه برای فضای جواب‌های $Ax = 0$ می‌توان $\{v\}$ را یک پایه از این فضا گرفت. پس می‌توان تمام x ها را با $x = \mu v$ نشان داد که μ یک اسکالر است. می‌دانیم $A(\text{adj}(A)v) = 0$ چون دترمینان برابر صفر است. پس یک μ وجود دارد که $\text{adj}(A)v = \mu v$.

پرسش ۳ (۱۴ نمره)

(آ) ثابت کنید:

$$||A - A_k||_2^2 = \sigma_{k+1}^2$$

(ب) فرض کنید A یک ماتریس $n \times d$ باشد. به ازای هر ماتریس B با رتبه حداکثر k ثابت کنید:

$$||A - A_k||_2 \leq ||A - B||_2$$

پاسخ

(آ) عبارت $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$ را تجزیه مقدار تکین ماتریس A در نظر بگیریم. در نتیجه $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$ و $A - A_k = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$.
همچنین بردار v را بردار تکین برتر ماتریس $A - A_k$ در نظر می گیریم. بردار v را به صورت ترکیب خطی از بردار های $v_1, v_2, \ldots, v_r$. در نتیجه $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$. حال می توان نوشت:

$$|(A - A_k)_v| = |\sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T \sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j| = |\sum_{i=k+1}^{r} \alpha_i \sigma_i u_i v_i^T v_i|$$

$$= |\sum_{i=k+1}^{r} \alpha_i \sigma_i u_i| = |\sqrt{\sum_{i=k+1}^{r} \alpha_i^2 \sigma_i^2}|$$

مقدار بیشینه v در عبارت آخر، با توجه به محدودیت $|v|^2 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2$ ، زمانی رخ میدهد که $\alpha_{k+1} = 1$ و به ازای سایر i ها $\alpha_i = 0$ باشند. حال می توان نتیجه گرفت $A - A_{k2}^2 = \sigma_{k+1}^2$ که حکم مسئله را ثابت می کند.

(ب) اگر A به رتبه k یا کمتر باشد، حکم مسئله برای این حالت بدیهی است چون: $A - A_{k2} = 0$. در نتیجه فرض کنیم که رتبه A بیشتر از k است. طبق بخش قبل می توان نتیجه گرفت: $A - A_{k2}^2 = \sigma_{k+1}^2$
حال فرض کنید یک ماتریس B با رنک حداکثر k وجود دارد به طوری که B تخمین نرم دوم بهتری برای A نسبت به A_k باشد، که یعنی: $A - B_2 <$

σ_{k+1}. فضای پوچ ماتریس B یا همان $Null(B)$، حداقل بعد برابر $d-k$ دارد. فرض کنیم بردار های $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$، $k+1$ بردار های ابتدایی تکین A باشد. با استفاده از تحلیل ابعاد می توان نتیجه گرفت که $z \neq 0$ وجود دارد که عضو مجموعه زیر باشد:

$$Null(B) \cap Span\{v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}\}$$

حال z را طوری تغییر اندازه می دهیم که $|z| = 1$. حال نشان می دهیم بردار z (که در فضای برداری $k+1$ بردار ابتدایی تکین ماتریس A می باشد) در رابطه مقابل صدق می کند: $(A-B)z \geq \sigma_{k+1}$. در نتیجه می توان گفت نرم دوم $A-B$ حداقل برابر با σ_{k+1} است که با فرض $A - B_2 < \sigma_{k+1}$ تناقض دارد. عبارت زیر را در نظر بگیریم:

$$A - B_2^2 \geq |(A-B)z|^2$$

از آنجا که $Bz = 0$:

$$A - B_2^2 \geq |Az|^2$$

همچنین از آنجا که z در اسپن $v1, v2, \ldots, v_{k+1}$ قرار دارد:

$$|Az|^2 = |\sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T z|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 (v_i^T z)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 (v_i^T z)^2 \geq \sigma_i^2 \sum_{i=1}^{k+1} (v_i^T z)^2 = \sigma_{k+1}^2$$

این عبارت نتیجه میدهد:

$$A - B_2^2 \geq \sigma_{k+1}^2$$

که با فرض

$$A - B_2 < \sigma_{k+1}$$

تناقض داشته و حکم ثابت می شود.

پرسش ۴ (۱۵ نمره) فرض کنید A, B به ترتیب ماتریس های $m \times n, n \times m$ باشند به طوری که $m \geq n$ نشان دهید:

$$|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA|$$

سپس نتیجه بگیرید AB, BA مقادیر ویژه ناصفر یکسانی دارند.

پاسخ با استفاده از تکنیک ضرب ماتریس های بلوکی می توان نوشت:

$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_m - AB & 0 \\ \lambda B & \lambda I_n \end{pmatrix}$$

به صورت مشابه:

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ 0 & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}$$

حال با گرفتن دترمینان از این دو عبارت خواهیم داشت:

$$\lambda^n |\lambda I_m - AB| = \lambda^m |\lambda I_n - BA|$$

زمانی که λ مخالف ۰ باشد، می توان نتیجه گرفت $|\lambda I_m - AB| = 0$ اگر و فقط اگر $|\lambda I_n - BA| = 0$ که نتیجه می دهد AB, BA مقادیر ویژه ناصفر یکسان دارند.

پرسش ۵ (۱۴ نمره) دو فرم درجه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$Q_i(x) = (x - a_i)^T A_i (x - a_i) + c_i, \quad i = 1, 2$$

که در آن $x, a_i \in \mathbb{R}^n$، A_i ماتریس‌های مثبت معین، و $c_i \in \mathbb{R}$ هستند. اگر تعریف کنیم $Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x)$، می‌توان نوشت:

$$Q(x) = (x-a)^T A (x-a) + c, \quad A = A_1 + A_2$$

(آ) نشان دهید که $A = A_1 + A_2$.

(ب) a را بر حسب a_1، a_2، A_1، و A_2 پیدا کنید.

(ج) مقدار c را بر حسب c_1، c_2، a_1، a_2، A_1، و A_2 به دست آورید.

پاسخ داریم:

$$Q_i(x) = x^T A_i x - a_i^T (A_i + A_i^T) x + a_i^T A_i a_i + c_i$$

$$Q_1(x) + Q_2(x) = x^T (A_1 + A_2) x - \left(a_1^T (A_1 + A_1^T) + a_2^T (A_2 + A_2^T)\right) x + a_1^T A_1 a_1 + c_1 + a_2^T A_2 a_2 + c_2$$

که به صورت نیز می‌تواند نوشته شود:

$$Q_۱(x) + Q_۲(x) = (x-a)^T A(x-a) + c$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$A = A_۱ + A_۲$$

$$a = (A_۱ + A_۱^T + A_۲ + A_۲^T)^{-۱}\big(a_۱^T(A_۱ + A_۱^T) + a_۲^T(A_۲ + A_۲^T)\big)$$

$$c = a_۱^T A_۱ a_۱ + c_۱ + a_۲^T A_۲ a_۲ + c_۲ - a^T(A_۱ + A_۲)a$$

پرسش ۶ (۱۴ نمره) اگر $\lambda_r < \cdots < \lambda_۲ < \lambda_۱$ مقادیر ویژه متمایز ماتریس متقارن حقیقی $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ باشند:

(آ) نشان دهید که فرم درجه دوم متناظر با A برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ نامساوی‌های زیر را ارضا می‌کند:

$$\lambda_r\|x\|^۲ \le q(x) \le \lambda_۱\|x\|^۲$$

(ب) ثابت کنید که مقادیر حداکثر و حداقل $q(x)$ بر روی کره واحد در $\mathbb{R}^n$ به ترتیب برابر با $\lambda_۱$ و λ_r هستند.

پاسخ آ)

با استفاده از تجزیه طیفی ماتریس A داریم:

$$A = U\Lambda U^T,$$

که در آن U ماتریسی متعامد ($U^TU = I$) و $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n)$ ماتریسی قطری شامل مقادیر ویژه A است.

y را چنین تعریف می‌کنیم:

$$y = U^T x, \quad \|y\|^۲ = \|x\|^۲.$$

در نتیجه:

$$q(x) = x^T A x = x^T U\Lambda U^T x = y^T \Lambda y = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i y_i^۲.$$

چون $\|y\|^۲ = \|x\|^۲ = \sum_{i=۱}^n y_i^۲$، داریم:

$$\lambda_n y_i^۲ \le \lambda_i y_i^۲ \le \lambda_۱ y_i^۲ \quad \forall i.$$

با جمع کردن بر روی همه iها، به دست می‌آید:

$$\lambda_n \sum_{i=۱}^{n} y_i^۲ \le \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i y_i^۲ \le \lambda_۱ \sum_{i=۱}^{n} y_i^۲.$$

از آنجا که $\sum_{i=۱}^n y_i^۲ = \|x\|^۲$، نتیجه می‌شود:

$$\lambda_n\|x\|^۲ \le q(x) \le \lambda_۱\|x\|^۲.$$

بنابراین، فرم درجه دوم $q(x)$ نابرابری زیر را ارضا می‌کند:

$$\lambda_n\|x\|^۲ \le q(x) \le \lambda_۱\|x\|^۲ \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

ب)

روی کره واحد در $\mathbb{R}^n$، داریم $\|x\|^۲ = ۱$. در این حالت، فرم درجه دوم به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$q(x) = x^T A x = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i y_i^۲, \quad \text{با شرط} \sum_{i=۱}^{n} y_i^۲ = ۱.$$

مقادیر $q(x)$ به توزیع $y_i^۲$ بین مقادیر ویژه λ_i بستگی دارد: برای **بیشینه کردن** $q(x)$، کل وزن $\|y\|^۲$ را به بزرگ‌ترین مقدار ویژه $\lambda_۱$ اختصاص می‌دهیم. این حالت زمانی رخ می‌دهد که x روی بردار ویژه متناظر با $\lambda_۱$ منطبق باشد. در این صورت:

$$y = e_۱, y = U^T x \implies x = Uy \implies x = v_۱$$
$$q(x) = \lambda_۱\|x\|^۲ = \lambda_۱.$$

برای **کمینه کردن** $q(x)$، کل وزن $\|y\|^2$ را به کوچک‌ترین مقدار ویژه λ_n اختصاص می‌دهیم. این حالت زمانی رخ می‌دهد که x روی بردار ویژه متناظر با λ_n منطبق باشد. در این صورت:

$$y = e_n, y = U^T x \implies x = Uy \implies x = v_n$$
$$q(x) = \lambda_n \|x\|^2 = \lambda_n.$$

بنابراین، مقادیر بیشینه و کمینه $q(x)$ روی کره واحد به ترتیب برابر با λ_1 و λ_n هستند.

پرسش ۷ (۱۵ نمره)

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (با در نظر گرفتن چندگانگی) باشد. همچنین $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$ یک چندجمله‌ای باشد و $g(A)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$g(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k,$$

که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است.

اثبات کنید: مقادیر ویژه $g(A)$ برابرند با $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_n)$.

پاسخ

ما با نشان دادن این که دترمینان $g(A)$ برابر $g(\lambda_1)\cdots g(\lambda_n)$ است، شروع می‌کنیم.

بر اساس قضیه اساسی جبر، چندجمله‌ای $g(x)$ را می‌توان بر روی اعداد مختلط به k عامل خطی تجزیه کرد. بنابراین، می‌توان نوشت

$$g(x) = a_k(x - c_1)\cdots(x - c_k),$$

برای برخی اعداد مختلط $c_1, \dots, c_k$. از آنجا که یک ماتریس با تمام توان‌های خود و با ماتریس همانی خاصیت جابه‌جایی دارد (Commutative است)، می‌توان $g(A)$ را به صورت

$$g(A) = a_k(A - c_1 I)\cdots(A - c_k I)$$

نوشت.

همچنین، چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A را با $p(\lambda) = |\lambda I - A|$ نشان می‌دهیم. از آنجایی که مقادیر ویژه A، $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ هستند، چندجمله‌ای مشخصه می‌تواند به صورت

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

تجزیه شود.

دترمینان $g(A)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
|g(A)| &= |a_k(A - c_1 I)\cdots(A - c_k I)| \\
&= (a_k)^n |A - c_1 I|\cdots|A - c_k I| \\
&= (a_k)^n (-1)^n |c_1 I - A|\cdots(-1)^n |c_k I - A| \\
&= (a_k)^n (-1)^{nk} |c_1 I - A|\cdots|c_k I - A|.
\end{aligned}$$

حال $|c_i I - A|$ همان $|\lambda I - A|$ با جایگزینی λ با c_i است، به این معنا که این چندجمله‌ای مشخصه A در $\lambda = c_i$ ارزیابی شده است. بنابراین

$$|c_i I - A| = p(c_i) = (c_i - \lambda_1)\cdots(c_i - \lambda_n).$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
|g(A)| &= (a_k)^n (-1)^{nk} p(c_1)\cdots p(c_k) \\
&= (a_k)^n (-1)^{nk} (c_1 - \lambda_1)\cdots(c_1 - \lambda_n)\cdots(c_k - \lambda_1)\cdots(c_k - \lambda_n) \\
&= (a_k)^n \times (a_k - c_1)\cdots(a_k - c_k)\cdots(\lambda_1 - c_1)\cdots(\lambda_1 - c_k)\cdots(\lambda_n - c_1)\cdots(\lambda_n - c_k) \\
&= g(\lambda_1)\cdots g(\lambda_n).
\end{aligned}$$

استدلال فوق نشان می‌دهد که اگر $g(x)$ هر چندجمله‌ای باشد، آنگاه $|g(A)| = g(\lambda_1)\cdots g(\lambda_n)$.

اکنون نشان خواهیم داد که مقادیر ویژه $g(A)$ برابر $g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_n)$ هستند.

فرض کنید a یک عدد دلخواه است و چندجمله‌ای

$$h(x) = a - g(x)$$

را در نظر بگیرید. در این صورت،

$$h(A) = aI - g(A),$$

و استدلال بالا نشان می‌دهد که

$$|h(A)| = h(\lambda_1)\cdots h(\lambda_n).$$

جایگذاری فرمول‌های $h(x)$ و $h(A)$ در این معادله به ما می‌دهد:

$$|aI - g(A)| = (a - g(\lambda_1)) \cdots (a - g(\lambda_n)).$$

از آنجایی که این برای تمام a ممکن صادق است، می‌توان نتیجه گرفت که به‌عنوان چندجمله‌ای:

$$|aI - g(A)| = (a - g(\lambda_1)) \cdots (a - g(\lambda_n)).$$

اما $|aI - g(A)|$ چندجمله‌ای مشخصه $g(A)$ است که در اینجا به طور کامل تجزیه شده است، بنابراین این نشان می‌دهد که مقادیر ویژه $g(A)$ برابر $g(\lambda_1), \ldots, g(\lambda_n)$ هستند.