دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

جبر خطی

پاییز ۱۴۰۳

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاسخ آزمونک اول

مسئله‌ی ۱. پلکانی! (۱ نمره)

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \frac{r_1}{\cos\theta} \to r_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} r_2 + r_1 \sin\theta \to r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ 0 & \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ 0 & \frac{1}{\cos\theta} \end{bmatrix} r_2 \cos\theta \to r_2 \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} r_1 - r_2 \cos\theta \to r_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مسئله‌ی ۲. زیرفضا بازی (۱/۵ نمره)

الف) با توجه به سه شرط یک زیر فضا اثبات می‌کنیم:

- اگر بردار صفر را از هر زیر فضا برداریم، بردار صفر به دست می‌آوریم.
- جمع دو بردار $u_1 + \cdots + u_m$ و $v_1 + \cdots + v_m$ از $V_1 + \cdots + V_m$ است چرا که:

$$(v_1 + \cdots + v_m) + (u_1 + \cdots + u_m) = (v_1 + u_1) + \cdots + (v_m + u_m)$$

$$\forall i : v_i + u_i \in V_i \Rightarrow (v_1 + u_1) + \cdots + (v_m + u_m) \in V_1 + \cdots + V_m$$

- ضرب اسکالر عدد دلخواه a در بردار $u_1 + \cdots + u_m$ نیز عضوی از $V_1 + \cdots + V_m$ است زیرا:

$$a(u_1 + \cdots + u_m) = au_1 + \cdots + au_m$$

$$\forall i : au_i \in V_i \Rightarrow au_1 + \cdots + au_m \in V_1 + \cdots + V_m$$

در نتیجه $V_1 + \cdots + V_m$ یک زیر فضا از V است.

ب) همه زیر فضاهای $V_1, \ldots, V_m$ درون زیر فضای $V_1 + \cdots + V_m$ هستند. (به ازای هر بردار $u \in V_i$ کافی است از بقیه زیر فضاها بردار صفر و از زیر فضای V_i بردار u را انتخاب کنیم.) حال نشان می‌دهیم کوچکترین زیر فضایی است که همه زیر فضاهای $V_1, \ldots, V_m$ را در بردارد. فرض کنید یک زیر فضا شامل $V_1, \ldots, V_m$ باشد. پس به ازای هر $u_1, \ldots, u_m$ که $u_i \in V_i$ باشد باید قرار بگیرد. پس تمامی بردار های $u_1 + \cdots + u_m$ در این زیر فضا هستند. در نتیجه هر زیر فضای شامل $V_1, \ldots, V_m$ شامل $V_1 + \cdots + V_m$ نیز هست و از آن جا که زیر فضای $V_1 + \cdots + V_m$ کوچکترین زیر فضا است.

مسئله‌ی ۳. جمع مستقیم (۱/۵ نمره)

به وضوح مجموعه توابع فرد، یک زیرفضا و مجموعه توابع زوج نیز یک زیرفضا است. برای اثبات دایرکت سام بودن، کافی است اثبات کنیم اشتراک این دو زیرفضا تنها عضو ۰ است و همچنین هر عضوی از مجموعه تمامی توابع را می‌سازند. فرض کنید f عضو هر دو زیر فضا باشد. داریم:

$$f(x) = -f(-x),\ f(x) = f(-x) \to f(x) = -f(x) \to f(x) = 0$$

پس خاصیت اول ثابت شد. همچنین برای هر تابع h درون فضای برداری اصلی داریم:

$$h(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{۲} + \frac{h(x) - h(-x)}{۲}$$

که به وضوح $\frac{h(x)+h(-x)}{۲}$ یک تابع زوج است و $\frac{h(x)-h(-x)}{۲}$ نیز یک تابع فرد است. پس هر تابعی، به صورت جمع یک تابع فرد و یک تابع زوج بدست آمد. بدین صورت، حکم اثبات می‌شود.