سوال ۱: الف) چون pivot ها در ماتریس R، در ستون های اول و سوم هستند، پس ستون های اول و سوم در ماتریس اصلی (A) پایه های فضای ستونی هستند. و این ستون ها در R، برای ساختن ستون های A کافی نیستند.

ب) به شکل مشابه، چون عناصر pivot در سطرهای اول و دوم هستند، این دو سطر هم در ماتریس A هم در ماتریس R، پایه فضای سطری هستند.

ج) می دانیم جمع نالیتی و رنک برابر تعداد ستون ها است. پس نالیتی برابر: ۵-۲=۳

حال برای محاسبه پایه های فضای null داریم:

$$Ax=0 \Rightarrow Rx=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

می دانیم متغیرهای در جای غیر pivot، متغیرهای آزاد هستند.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_4+x_5=0 \\ x_3+4x_4+2x_5=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1=-3x_4-2x_2-x_5 ,\ x_3=-4x_4-2x_5 \Rightarrow x=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2+\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4+\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5$$

پس این سه بردار پایه های فضای null هستند.

مسئله‌ی ۱. Independence - متداول

- فرض کنید L ماتریسی $n \times n$ و $V \in \mathbb{R}^n$ می‌باشد. اگر فرض کنیم، z برداری است که $z \in V$ و $L^{k-1} z \neq 0$ اما $L^k z = 0$ ، اثبات کنید بردارهای $z, Lz, L^2 z, ..., L^{k-1} z$ مستقل خطی هستند.
- اثبات کنید بردارهای $(v_1, v_2, ..., v_n)$ فضای V را $span$ می‌کنند اگر و تنها اگر بردارهای $(v_1 - v_2, v_2 - v_3, ..., v_{n-1} - v_n, v_n)$ فضای V را $span$ می‌کنند.

پاسخ:

- در ابتدا ترکیب خطی بردارهای داده شده را با ضرایب فرضی $\alpha_1, ..., \alpha_k$ نوشته و برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$\alpha_1 z + \alpha_2 Lz + ... + \alpha_k L^{k-1} z = 0$$

نکته:

$$L^k z = 0 \wedge n > k \Longrightarrow L^n z = 0$$

اگر دو طرف عبارت اولیه را در L^{k-1} ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\alpha_1 L^{k-1} z + \alpha_2 L^k z + ... \alpha_k L^{2k-1} = \alpha_1 L^{k-1} z = 0$$

بر اساس صورت سوال می‌دانیم، $L^{k-1} z \neq 0$ پس برای آن که عبارت کلی باقی‌مانده صفر شود، ضریب α_1 باید صفر باشد. بر اساس نتایج بالا، عبارت جدید بدست آمده برابر است با:

$$\alpha_2 Lz + \alpha_3 L^2 z + ... + \alpha_k L^{k-1} z = 0$$

اگر به مانند قبل، تمام عبارت را از سمت چپ در L^{k-2} ضرب کنیم، به مانند قبل به عبارت $\alpha_2 L^{k-1} z = 0$ خواهیم رسید و بر اساس توضیحات داده شده قبلی مقدار $\alpha_2 = 0$ خواهد بود.
اگر براساس همین رویه پیش برویم، خواهیم دید که تمام α ها صفر خواهند شد و اثبات کامل می‌شود.

- ابتدا برگشت که راحت‌تر است را اثبات می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u &= b_1(v_1 - v_2) + b_2(v_2 - v_3) + ... + b_{n-1}(v_{n-1} - v_n) + b_n v_n \\ &= b_1 v_1 + (b_2 - b_1) v_2 + (b_3 - b_2) v_3 + ... + (b_n - b_{n-1}) v_n \in span(v_1, v_2, ..., v_n) \end{aligned}$$

حال به سراغ قسمت رفت ماجرا می‌رویم. داریم:

$$\begin{aligned} u &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n \\ &= a_1 v_1 - a_1 v_2 + a_1 v_2 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n \\ &= a_1 v_1 - a_1 v_2 + a_1 v_2 - a_1 v_3 + a_2 v_2 - a_2 v_3 + a_1 v_3 + a_2 v_3 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + ... + a_n v_n \\ &= a_1 (v_1 - v_2) + (a_1 + a_2)(v_2 - v_3) + (a_1 + a_2 + a_3) v_3 + a_4 v_4 + ... + a_n v_n \\ &= \Sigma_{i=1}^{n-1} \left[\left(\Sigma_{k=1}^{i} a_k \right) (v_i - v_{i+1}) \right] + a_n v_n \in span(v_1 - v_2, v_2 - v_3, ..., v_{n-1} - v_n, v_n) \end{aligned}$$