مسئله‌ی ۱. Product Inner - متداول

- فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی حقیقی است و $u, w \in V$. درستی رابطه زیر را اثبات کنید

$$\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}(||v+w||^{2} - ||v-w||^{2})$$

- فرض کنید V فضای تمام توابع حقیقی پیوسته مشتق‌پذیر برروی بازه‌ی $[a,b]$ هستند. اثبات کنید تعریف زیر نشان‌دهنده یک ضرب داخلی است

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^{'}(x)g^{'}(x)dx$$

پاسخ:

- از سمت راست عبارت داده شروع و به سمت چپ می‌رسیم:

$$\begin{aligned} R.H.S &= \frac{1}{4}(\langle v+w,v+w\rangle - \langle v-w,v-w\rangle) \\ &= \frac{1}{4}(\langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle - \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle - \langle w,w\rangle) \\ &= \frac{1}{4}(2\langle v,w\rangle + 2\langle w,v\rangle) = \langle v,w\rangle \end{aligned}$$

در خط پایانی از حقیقی بودن فضای ضرب داخلی استفاده شد زیرا در این فضا $\langle w,v\rangle = \langle v,w\rangle$

- برای اثبات این که رابطه تعریف شده یک ضرب داخلی است باید ۳ شرط بررسی و اثبات شود:

1. $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$
براساس خاصیت جابه‌جایی ضرب داریم:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^{'}(x)g^{'}(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx + \int_a^b g^{'}(x)f^{'}(x)dx$$

2. $\langle \alpha f,g\rangle = \alpha\langle g,f\rangle$ خواهیم داشت:

$$\int_a^b \alpha f(x)g(x)dx + \int_a^b \alpha f^{'}(x)g^{'}(x)dx = \alpha\left(\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^{'}(x)g^{'}(x)dx\right)$$

3. $\langle f,f\rangle \geqslant 0$ و شرط تساوی عبارت بالا برقرار است اگر و تنها اگر $f = 0$ خواهیم داشت:

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b f^{2}(x)dx + \int_a^b (f^{'})^{2}(x)dx \geqslant 0$$

عبارت بالا همیشه برقرار است زیرا می‌دانیم که مربع توابع تعریف شده در صورت سوال همیشه مثبت هستند و بالای محور x ها قرار دارند بنابراین انتگرال آن‌ها در هر بازه‌ای نامنفی خواهد بود. با همین استدلال می‌توان گفت تنها در شرایطی عبارت بالا صفر خواهد بود که تابع هم خود صفر باشد و هم مشتق آن صفر باشد که این شروط فقط برای تابع صفر صدق می‌کنند.

مسئله‌ی ۲. Complement Orthogonal - چالشی

فرض کنید V یک زیرفضای حقیقی با ابعاد محدود و ضرب داخلی تعریف شده به شکل $\langle .,. \rangle$ می‌باشد. همچنین در نظر بگیرید W زیرفضایی از این فضای برداری باشد. حال اگر مجموعه زیر را به این شکل تعریف کنیم که

$$W^{\perp} = \{v \in V : \langle v,w \rangle = \cdot for\ all\ w \in W\}$$

اثبات کنید که $dimW + dimW^{\perp} = dimV$

پاسخ:

فرض کنید $\beta = \{w_۱, w_۲, ..., w_k\}$ و $\gamma = \{x_۱, x_۲, ..., x_m\}$ به ترتیب پایه‌های W و $W^{\perp}$ باشند. برای این که حکم را ثابت کنیم باید نشان داد که $\beta \cup \gamma = \{w_۱, w_۲, ..., w_k, x_۱, ..., x_m\}$ پایه‌ای برای فضای برداری V می‌باشد. می‌دانیم برای اثبات پایه بودن یک مجموعه برداری باید دو شرط بررسی شود. اولین مورد این که آن مجموعه برداری باید فضای برداری را $span$ کنند و دوم آن که بردارهای آن مجموعه باید مستقل خطی باشند. بردار $v \in V$ را در نظر بگیرید. بر اساس قضیه‌ای در اسلایدها می‌دانیم که $v = v_۱ + v_۲$ که $v_۱ \in W$ و $v_۲ \in W^{\perp}$. به دلیل آن که مجموعه های β و γ پایه‌های W و $W^{\perp}$ هستند ضرایبی مانند $a_۱, a_۲, ..., a_k, b_۱, b_۲, ..., b_m$ وجود دارند که روابط $v_۱ = \Sigma_{i=۱}^{k} a_i w_i$ و $v_۲ = \Sigma_{i=۱}^{m} b_j x_j$ برقرار باشند. حال داریم:

$$v = v_۱ + v_۲ = \Sigma_{i=۱}^{k} a_i w_i + \Sigma_{i=۱}^{m} b_i x_i$$

که نتیجه می‌دهد $\beta \cup \gamma$ فضای برداری V را $span$ می‌کند. حال به سراغ شرط دوم می‌رویم. اگر فرض کنیم رابطه $\Sigma_{i=۱}^{k} c_i w_i + \Sigma_{i=۱}^{m} d_j x_j = \cdot$ برقرار باشد باید اثبات کنیم که تمامی c_i و d_i ها صفر هستند تا مستقل خطی بودن مجموعه $\beta \cup \gamma$ اثبات شود. با توجه به رابطه بالا داریم $\Sigma_{i=۱}^{k} c_i w_i = -\Sigma_{i=۱}^{m} d_j x_j$ که نتیجه می‌دهد:

$$\Sigma_{i=۱}^{k} c_i w_i \in W \cap W^{\perp} \quad and \quad \Sigma_{i=۱}^{m} d_i x_i \in W \cap W^{\perp}$$

حال طبق قضایای اسلاید می‌دانیم که $W \cap W^{\perp} = \{\cdot\}$. بنابراین به این نتیجه می‌رسیم که $\Sigma_{i=۱}^{k} c_i w_i = \Sigma_{i=۱}^{m} d_i x_i = \cdot$ و از آن جایی که مجموعه‌های β و γ خود پایه بودند و به تبع آن مستقل خطی، پس تمام c_i و d_i ها صفر می‌شوند و در نتیجه مجموعه $\beta \cup \gamma$ یک پایه برای کل فضای V می‌شود.