مسئله‌ی ۲. Determinant - چالشی

دترمینان ماتریس‌های زیر را حساب کنید . در مورد دوم فرض کنید $t \geqslant ۲$. در اینجا t ابعاد ماتریس است.
(راهنمایی: برای مورد دوم می‌توانید جواب را بازگشتی بنویسید)

$$B = \begin{pmatrix} n^۲ & (n+۱)^۲ & (n+۲)^۲ \\ (n+۱)^۲ & (n+۲)^۲ & (n+۳)^۲ \\ (n+۲)^۲ & (n+۳)^۲ & (n+۴)^۲ \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & x & x & x & x & x & \cdots & x \\ ۱ & x & ۲x & ۲x & ۲x & ۲x & \cdots & ۲x \\ ۱ & x & ۲x & ۳x & ۳x & ۳x & \cdots & ۳x \\ ۱ & x & ۲x & ۳x & ۴x & ۴x & \cdots & ۴x \\ ۱ & x & ۲x & ۳x & ۴x & ۵x & \cdots & ۵x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۱ & x & ۲x & ۳x & ۴x & ۵x & \cdots & (n-۱)x \end{pmatrix}$$

پاسخ:
مورد اول:
سطر اول را از سطر دوم و سوم کم می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} n^۲ & (n+۱)^۲ & (n+۲)^۲ \\ ۲n+۱ & ۲n+۳ & ۲n+۵ \\ ۴n+۴ & ۴n+۸ & ۴n+۱۲ \end{pmatrix}$$

حال ستون اول را از ستون‌های دو و سه کم می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} n^۲ & ۲n+۱ & ۴n+۴ \\ ۲n+۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

در نهایت دو برابر ستون دوم را از ستون سوم کم می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} n^{۲} & ۲n+۱ & ۲ \\ ۲n+۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

اگر دترمینان را از سطر سوم باز کنیم خواهیم داشت

$$det(A) = ۲\begin{vmatrix} ۲n+۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۲(-۴) = -۸$$

مورد دوم:
برای مورد دوم از استقرا استفاده می‌کنیم: اگر A_n به معنای ماتریس $n \times n$ باشد، برای حالت پایه که برابر است با $A_۲$ خواهیم داشت $det(A_۲) = (x-۱)$. حال اگر فرض کنیم جواب جواب A_n را داریم، به سراغ $A_{n+۱}$ می‌رویم. داریم:

$$A_{n+۱} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ ۱ & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x & \cdots & (n-۱)x & (n-۱)x \\ ۱ & x & \cdots & (n-۱)x & nx \end{pmatrix}$$

با توجه به خطی بودن دترمینان می‌توان دترمینان ماتریس بالا به به صورت زیر نوشت

$$det\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ ۱ & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x & \cdots & (n-۱)x & (n-۱)x \\ ۱ & x & \cdots & (n-۱)x & nx \end{vmatrix} =$$

$$det\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ ۱ & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x & \cdots & (n-۱)x & (n-۱)x \\ ۱ & x & \cdots & (n-۱)x & (n-۱)x \end{vmatrix} + det\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ ۱ & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x & \cdots & (n-۱)x & (n-۱)x \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & x \end{vmatrix}$$