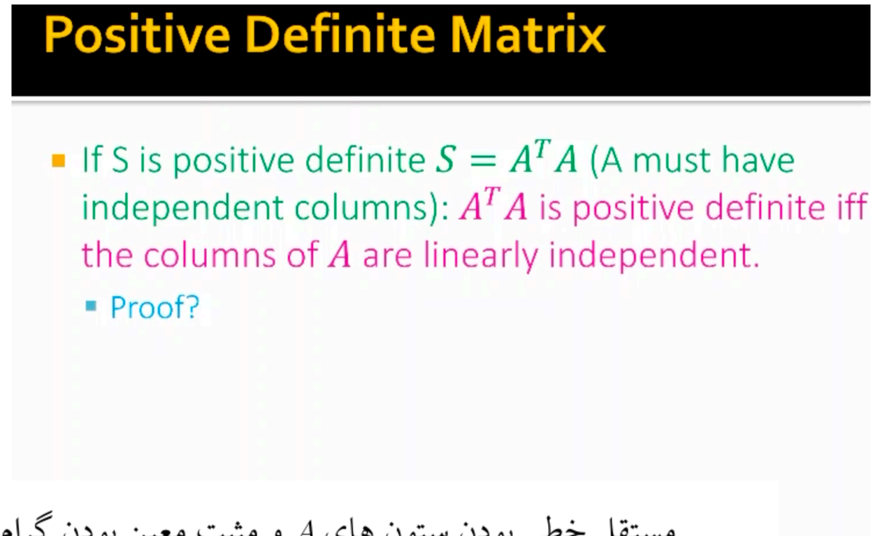
Symmetric Matrices and Quadratic Forms



مستقل خطی بودن ستون های A و مثبت معین بودن گرام آن دوطرفه است. اگر ستون های A مستقل خطی باشند:

$$\forall x \neq 0 : \; Q(x) = x^T A^T A x$$

به دلیل استقلال خطی ستون ها داریم که

$$x \neq 0 \implies Ax \neq 0$$

درنتیجه

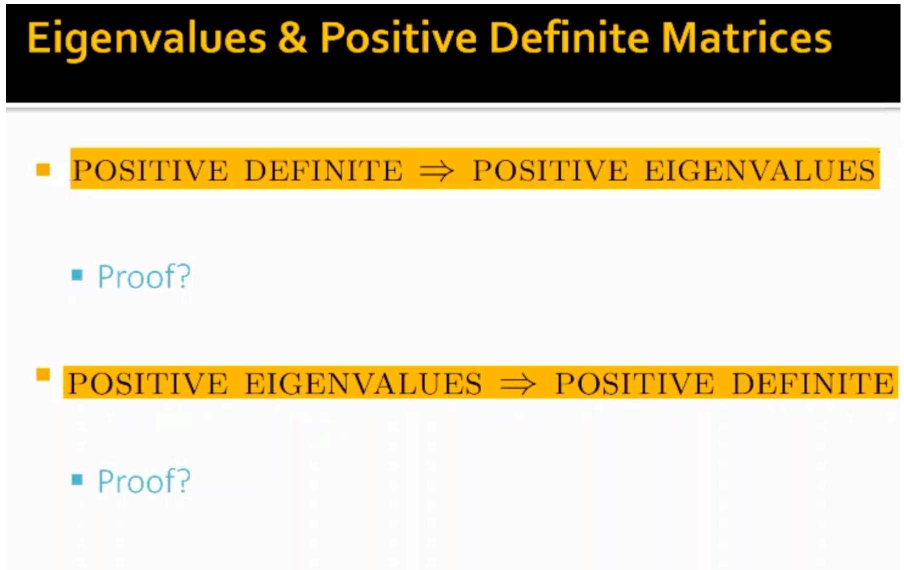
$$x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2 > 0$$

پس $A^T A$ مثبت معین است.

طرف دیگر:

$$\forall x \neq 0 : \|Ax\|^2 = (Ax)^T (Ax) = x^T A^T A x = Q(x) > 0 \implies \|Ax\|^2 > 0 \implies Ax \neq 0$$

پس نال اسپیس آن فقط صفر است که یعنی ستون های آن مستقل خطی اند.



نماد T درصورت مختلط بودن فضا در روابط زیر به $*$ تغییر می‌یابد. ابتدا فرض میکنم pd است. مقدار ویژه λ را در نظر میگیریم پس $Sv = \lambda v$ و

$$pd \implies x^T S x > 0 \implies 0 < v^T S v = v^T \lambda v = \lambda v^T v = \lambda \|v\|^2$$

از انجا که بردار ویژه ها ناصفر اند و نرم به توان دو عددی مثبت است پس به دلیل مثبت بودن کل عبارت داریم که λ بزرگتر از صفر است.
طرف دیگر: میدانیم S متقارن است پس طبق spectral decomposition داریم که

$$S = UDU^T$$

که U ماتریس unitary و D قطری است.

$$x^T S x = x^T (UDU^T) x = (x^T U) D (U^T x) = y^T D y = \sum_{i=1}^{n} D_{ii} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 > 0$$

که نابرابر آخر از مثبت بودن توان دوی y و مثبت بودن مقدار ویژه ها طبق فرض پدید آمده است.
نکته: تساوی قبل تر از اینکه قطر D مقدار ویژه های S اند نتیجه می‌شود.
نامساوی به دست آمده همان شرط مثبت معین بودن S می‌باشد.

Left determinants & Positive Definite Matrix

- All upper left determinants must be > 0

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad 2>0$$

- POSITIVE DEFINITE $\Rightarrow$ POSITIVE DETERMINANT
  - Proof?

داریم که

$$x^T S x > 0$$

تعریف می کنیم

$$x^T = [x_k^T \quad 0^T]$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} x_k^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_k & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k^T S_k & x_K^T B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} = x_k^T S_k x_k > 0$$

پس S_k نیز pd است. به موجب آن همه مقادیر ویژه آن مثبت اند و درنتیجه دترمینان که ضرب مقدار ویژه ها است نیز مثبت است.
با طور مشابه با استدلال بر روی S_k و همینطور زیرماتریس های کوچک تر ثابت می شود که دترمینان تمام S_i ها مثبت است.

Sylvester's Criterion

- Suppose $A \in \mathcal{M}_n$ is self-adjoint. Then A is positive definite if and only if, for all $1 \leq k \leq n$, the determinant of the top-left $k \times k$ block of A is strictly positive.

det اگر

طرف دیگر: اگر دترمینان ها مثبت باشند ماتریس pd است.

از استقرا استفاده میکنیم. پایه ماتریس 1×1 است که یک عدد است و مثبت بودن دترمینان آن معادل مثبت بودن خود عدد و درنتیجه pd بودن است.

فرض می کنیم حکم برای $A_{(n-1)\times(n-1)}$ برقرار است و ثابت میکنیم اگر دترمینان های $A_{n\times n}$ مثبت باشند، ماتریسی pd است.

بردار ویژه های A دو به دو بر هم عمومدند. قرار می دهیم:

$$x = \sum_i \lambda_i v_i$$

که مقدار و بردار ویژه ها در جمع قرار دارند.

$$(\sum \lambda_i v_i)^T A (\sum \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i^2 v_i^T A v_i = \sum \lambda_i^2 v_i^T \lambda v_i = \sum \lambda_i^3 v_i^T v_i = \sum \lambda_i^3 \|v_i\|^2 > 0$$

جملات $v_i v_j$ در جمع به دلیل تعامد بردار ویژه ها حذف (صفر) شدند.

نامساوی آخر ناشی از این است که دترمینان در $A_{n\times n}$ و $A_{(n-1)\times(n-1)}$ بنابراین چون دترمینان ضرب مقدار ویژه ها است تفاوت این دو ضرب که λ_n است باید مثبت باشد. مشابه همین استدلال برای دوتایی های قبلی $A_{i\times i}$ ها نتیجه میدهد تمام مقدار ویژه ها تا اینجا مثبت اند پس توان سه آن ها نیز مثبت است. در نابرابری بالا پس هم توان دوی نرم مثبت است و هم توان سه مقدار ویژه ها پس جمع نیز عددی مثبت است.

Pivots & Positive Definite Matrix

- POSITIVE PIVOTS $\Rightarrow$ POSITIVE DEFINITE
  - Proof?

A متقارن است پس طبق LDU داریم که

$$A = LDU$$

که L و D و U به ترتیب پایین مثلثی و قطری و بالا مثلثی اند. طبق تقارن داریم که

$$LDU = (LDU)^T = U^T D^T L^T = U^T D L^T$$

که تساوی آخر ناشی از قطری بودن D است. همچنین طبق برقراری زیر

$$U^T DU = U^T DU \implies L^T = U \implies A = LDL^T = LD^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} L^T = R^T R$$

که $R = D^{\frac{1}{2}} L$ است.

$$x^T A x = x^T R^T R x = (Rx)^T (Rx) = \|Rx\|^2 > 0$$

که حکم است. البته برای نابرابری اکید آخر باید استقلال خطی ستون های R بررسی شود.

Properties

- Suppose $A, B \in \mathcal{M}_n$ are positive (semi)definite, $P \in \mathcal{M}_{n,m}$ is any matrix, and $c > 0$ is a real scalar. Then
  a) $A + B$ is positive (semi)definite,
  b) cA is positive (semi)definite,
  c) A^T is positive (semi)definite, and
  d) P^*AP is positive semidefinite. Furthermore, if A is positive definite then P^*AP is positive definite if and only if $\text{rank}(P) = m$.

قرار می دهیم $x = Py$:

$$x^T A x > 0 \implies (Py)^T A (Py) > 0 \implies y^T (P^T A P) y > 0$$

درنتیجه کوادرتیک فرم به دست آمده با ماتریس $P^T A P$ به ما psd بودن آن را نتیجه می دهد. برای pd بودن باید $Py \neq 0$ که معادل استقلال خطی ستون های P می‌باشد.