به نام خدا

حل تمرین دوم جبرخطی پاییز ۱۴۰۳

پرسش ۱ : اثبات کنید $w_1 , w_2, \dots, w_k$ و $v_1 , v_2, \dots, v_k$ در فضای برداری V مستقل خطی باشند (هر مجموعه بردار v_i و w_i به صورت جداگانه مستقل خطی هستند) در نتیجه $v_1 + w_1 , v_2 + w_2 , \dots, v_k + w_k$ مستقل خطی هستند.

پرسش ۲ : فرض کنید $v_1 , v_2, \dots, v_m$ یک لیست از بردار ها در فضای برداری V هستند. برای $k \epsilon \{ 1, \dots, m\}$ تعریف میکنیم :

$$w_k = v_1 + \cdots + v_k$$

نشان دهید که $v_1 , v_2, \dots, v_m$ پایه برای V هستند اگر و تنها اگر $w_1 , w_2, \dots, w_m$ پایه برای V باشند.

پرسش ۳ : فرض کنید S یک زیرمجموعه مستقل خطی از فضای برداری V باشد. فرض کنید b یک بردار در V باشد به طوریکه در Span بردار های مجموعه S نباشد. اثبات کنید b با بردار های مجموعه S مستقل خطی هستند.

پرسش ۴ : اثبات کنید مجموعه بردار $v_1 , v_2, \dots, v_k$ یک مجموعه affinely independent هستند در فضای در R^n و q یک نقطه دلخواه در R^n می باشد. نشان دهید مجموعه $v_1 + q, v_2 + q, \dots, v_k + q$ نیز affinely independent هستند.

پرسش ۵ : تنها با استفاده از تعریف affine dependence نشان دهید مجموعه بردار $\{ v_1 , v_2 \}$ در فضای در R^n affinely dependent هستند اگر و تنها اگر $v_1 = v_2$

پرسش ۶ : بعد مجموعه زیر را بیابید و برای آن یک مجموعه بردار پایه بیابید :

$$U = \left\{ p \ \epsilon \ \mathrm{Þ}_3(R) : p'(5) = 0 \right\}$$

منظور از $\mathrm{Þ}_3(R)$ چند جمله ای های با حداکثر درجه ۳ هست

پرسش ۷ : فرض کنید W یک زیر فضای برداری از زیر مجموعه V می باشد اثبات کنید $\dim(V) = \dim(W) + \dim\,(W^T)$

پرسش ۸ : عبارات زیر اثبات کنید :

آ : $Rank(I_m - AA^T) - Rank(I_n - A^TA) = m - n$

ب : اگر ماتریس A ماتریس n در n دلخواه و B ماتریس هم ماتریس n در n فقط با درایه های همه یک آنکاه

$$Rank(A) - 1 \leq Rank(A - B)$$

پ :

$$Rank(AB) \leq \min(Rank(A) + Rank(B))$$

د : اگر ماتریس A ماتریس n در n دلخواه به طوریکه $A^2 = 0$:

$$Rank(A + A^T) = 2Rank(A)$$