- حل تمرین جبرخطی :

پرسش اول : مجموعه مستقل خطی : به یک مجموعه $\{v_1, \ldots, v_n\}$ مستقل خطی می‌گویند

به طوری که : $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$ if $a_i = 0 \quad i \in [1, n]$

a ها عضو فیلد هستند و وکتورها عضو مجموعه فضای برداری هست.

مثال نقض : $w_1 = (-1, 0) \quad w_2 = (0, 1)$

$v_1 = (1, 0) \quad v_2 = (0, -1)$

$v_1 + w_1 = (0, 0) \quad v_2 + w_2 = (0, 0)$

پرسش دوم : غلط : K لزوما بعد فضای برداری V نیست.

Basis : فرض کنید H زیرفضای V باشد آنگاه مجموعه $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$

در V یک مجموعه Basis برای H هست اگر دو شرط زیر را داشته باشد :

1) B مجموعه مستقل خطی باشد   2) $H = \text{span}\{b_1, \ldots, b_n\}$

ادعا : $\text{span}\{w_1, \ldots, w_m\} = \text{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$

اگر این گزاره را اثبات کنیم چون هر دو طرف سوال فرض می‌کند این مجموعه ها پایه هستند پس span برابر با H می‌شود و آن یکی هم به همین شکل span آن برابر با H می‌شود.

Subject
Date

ادامه

نکته: ناصفر (صفر رو منظورم) F در نظر می‌گیریم.

ادعا ۱: $\mathrm{span}\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_m\}$

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 (v_1 + v_2) + \dots + \alpha_m (v_1 + \dots + v_m)$$
$$= (\alpha_1 + \dots + \alpha_m) v_1 + (\alpha_2 + \dots + \alpha_m) v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

حال $\mathrm{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ را در نظر بگیرید $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m$

$\beta_1 \in F \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k \in F \Rightarrow \alpha_1 + \dots + \alpha_m \subseteq \beta_m$

$$\Rightarrow \mathrm{span}\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_m\}$$

ادعا ۲: $\mathrm{span}\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathrm{span}\{w_1, \dots, w_m\}$

$$v_k = w_k - w_{k-1}$$

$$\rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 (w_2 - w_1) + \dots + \alpha_m (w_m - w_{m-1})$$

$$\rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2) w_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) w_2 + \dots + (\alpha_m - \alpha_{m-1}) w_{m-1} + \alpha_m w_m$$

مثل حالت قبلی می‌توان گفت:

$$\mathrm{span}\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathrm{span}\{w_1, \dots, w_m\}$$

$$\mathrm{span}\{v_1, \dots, v_m\} = \mathrm{span}\{w_1, \dots, w_m\} \Leftarrow \text{ادعا ۱ و ۲}$$

به نام خدا

حال می‌خواهیم به سراغ اثبات شرط اول پایه بودن از جهت اول برویم:

اگر v_1 تا v_m مستقل خطی باشند، آنگاه w_1 تا w_m مستقل خطی است.

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m = 0$$
$$\to \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m (v_1 + \dots + v_m) = 0$$
$$\to (\alpha_1 + \dots + \alpha_m) v_1 + \dots + (\alpha_{m-1} + \alpha_m) v_{m-1} + \alpha_m v_m = 0$$

چون v_1 و ... و v_m مستقل خطی هستند آنگاه در صورتی برابر با صفر می‌شوند که تمام ضرایبشان برابر با صفر شود، آنگاه برای $v_m \leftarrow \alpha_m = 0$ و برابر $v_{m-1} \to \alpha_{m-1} = 0$ (به همین شکل شده بود) ... بنابراین تنها در صورتی $\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m = 0$ می‌شوند که $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ باشد.

- حال طرف دیگر: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_1 = 0$

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 (w_2 - w_1) + \dots + \alpha_m (w_m - w_{m-1}) = 0$$
$$\to (\alpha_1 - \alpha_2) w_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) w_2 + \dots + \alpha_m w_m = 0$$

حال چون می‌دانیم w_1 و ... و w_m مستقل خطی هستند آنگاه $\alpha_m = 0$ باید صفر باشد

بنابراین $\alpha_{m-1} - \alpha_m = 0$ نتیجه می‌شود $\alpha_{m-1} = 0$. به صورت زنجیره‌ای همشون صفر می‌شوند.

Subject
Date

بنام خدا

— پرسش سوم) برهان خلف : فرض کنید b با آن ها وابسته خطی باشد.

فرض کنید $S=\{s_1,\dots,s_n\}$ آنگاه طبق فرض $a_1,\dots,a_{n+1}$ وجود دارد

که همه آنها صفر نیستند و داریم: $a_1s_1+\dots+a_ns_n+a_{n+1}b=0$

حال دو حالت داریم: 1) $a_{n+1}=0$: در این صورت عبارت $a_{n+1}b$ حذف شده

و عبارت $a_1s_1+\dots+a_ns_n=0$ شده است درحالیکه $a_1\dots a_n$ های

موجود دارند که ناصفر هستند که این با تعریف مستقل خطی بودن آنها تناقض دارد.

2) $a_{n+1}\neq 0$: در این صورت می توان با بردن b به سمت راست معادله نوشت

$a_1s_1+\dots+a_ns_n=-a_{n+1}b$

که این به این معنی است که b در $\mathrm{span}(S)$ قرار دارد که باز هم تناقض است

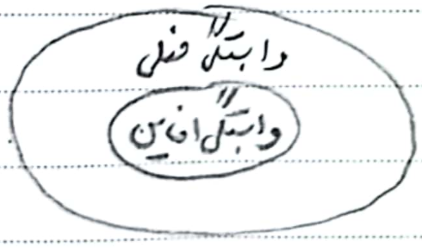
پس b قطعا با S مستقل خطی خواهد بود.

پرسش چهارم: Affine dependency:

مجموعه بردارهای $\{v_1, \dots, v_p\}$ در R^n، Affinely dependent هستند، اگر وجود داشته باشند، اعداد حقیقی c_1 تا c_p به صورتیکه:

$c_1 + \dots + c_p = 0$ ⟶ شرط اضافه

$$\left.\begin{array}{l} c_1v_1 + \dots + c_pv_p = 0 \\ \text{و همه } c_i \text{ ها برابر صفر نباشند} \end{array}\right\} \longrightarrow \text{شروط linear dependency}$$



برهان خلف: فرض کنید $v_1+q, \dots, v_k+q$، affinely dependent هستند آنگاه

$$\alpha_1(v_1+q) + \dots + \alpha_n(v_n+q) = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_nv_n + \overbrace{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}^{\text{طبق فرض خلف } 0} q = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_nv_n = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

تناقض با اینکه $v_1, \dots, v_k$ مستقل افاین هستند.

Subject
Date

پرسش پنجم: طبق تعریف Affine dependency داریم: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$

$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 (v_1 - v_2) = 0$

اگر $\alpha_1 = 0$ باشد آنگاه $\alpha_2 = 0$ ولی این با Affine dependency تناقض دارد

چون نباید همه α ها برابر صفر باشند. بنابراین باید $v_1 - v_2 = 0$ باشد

پس $v_1 = v_2$

- پرسش ششم: فرض کنید در فضای R^3 بردار (a_1, a_2, a_3) را

داریم. این بردار فضای چند جمله ای P_2 به $a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ مپ می‌شود.

صرفاً برای شهود بهتر: $1 \to (1,0,0)$ / $x \to (0,1,0)$ / $x^2 \to (0,0,1)$

$\dim(V)$: تعداد وکتورهای مجموعه پایه آن.

در نظر بگیرید سه چند جمله‌ای $(x-5)^3$، $(x-5)^2$ و 1 را. می‌خواهیم اثبات

کنیم این ۳ چند جمله‌ای مستقل خطی هستند.

$$c + b(x-5)^2 + a(x-5)^3 = 0$$

برای اینکه این عبارت برابر با صفر بشود ضرایب x^3 و x^2 و x و 1 باید صفر بشوند.

به نام خدا

تنها چند جمله‌ای که ضریب x^3 دارد $(x-5)^3$ هست بنابراین برای صفر شدن

باید ضریب این عبارت برابر با صفر شود $\leftarrow$ $a=0$

با همین استدلال اگر بدانیم $a=0$ است تنها ضریب x^2 برای $(x-5)^2$ خواهد بود

پس $b=0$.

به طور مشابه c هم باید برابر 0 باشد.

پس اثبات شد این ۳ مستقل خطی هستند.

پس می‌توان گفت $\dim(U) \geqslant 3$ است. از طرفی می‌دانیم $U \leq P_3$

بنابراین $\dim(U) \leqslant 4$ می‌باشد چون $\dim(P_3)=4$ می‌باشد.

اما می‌دانیم $U \neq P_3(x)$ بنابراین نمی‌توانند بعد این دو با هم برابر باشند.

دلیل: تنها یک subspace فضای برداری که بعدش با خودش برابر است، خودش می‌باشد.

بنابراین $\dim(U) \neq \dim(P_3)$ پس نتیجه می‌گیریم $\dim(U)=3$

به نام خدا

ـ پرسش هفتم: گرام اشمیت می خواد هنا سان هنوز تدریس نشده است.

ـ پرسش هشتم: فرض کنید ماتریس A یک ماتریس $m \times n$ می باشد

با ستون های $v_1, \ldots, v_n$. حال column space ماتریس A می شود

ترکیب خطی این ستون ها. حال ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

یک ضریب از v_1 شد

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} [x_1] = \begin{bmatrix} a_1 x_1 \\ a_2 x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

حال این ماتریس را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x_1 + b_1 x_2 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

به طرز جالبی اگر بخواهید فضایی که Ax ایجاد می کند را ترسیم کنید می توانید بگویید

همان col space A می باشد.

$Rank(A)$: به بعد col space A، رنک A گفته می شود

به زبان ریاضیاتی: $dim(colspace(A)) = Rank(A)$

ـ Null space : در تبدیل خطی $(Ax = y)$ به subspace ی

از داده که به صفر میپ می شوند، null space A می گویند

$$Ker(A) = \{x \in A \mid Ax = 0\}$$

به نام خدا

Nullity(A) : به بعد Ker(A) (A, null space) ، Nullity(A) گفته می‌شود.

اینجا با Null(A) نشونش می‌دیم.

- ماتریس full rank : یعنی ماتریسی که rank آن برابر با بیشترین مقدار ممکن برای ماتریس های هم سایز خودش باشد.

نکته) اگر ماتریس A ، m×n باشد آنگاه رنک حداکثر min(n, m) می‌تواند باشد.

ب) ادعا: $\text{Rank}(A+B) \leq \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B)$ A, B $n \times n$

$$\text{colspace}(A+B) = \alpha_1(a_1+b_1) + \alpha_2(a_2+b_2) + \dots + \alpha_n(a_n+b_n)$$

$$= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

$$\subseteq \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$$

عبارت بدست آمده معادل $\text{colspace}(A) \cup \text{colspace}(B)$ می‌باشد.

$$\text{colspace}(A) \cup \text{colspace}(B) = \text{colspace}(A) + \text{colspace}(B) - \text{colspace}(A) \cap \text{colspace}(B)$$

$$\Rightarrow \text{colspace}(A+B) \subseteq \text{colspace}(A) + \text{colspace}(B)$$

وقتی یک زیرفضا زیر مجموعه یک زیر فضای دیگر باشد قطعا بعد آن هم کمتر مساوی آن خواهد بود.

$$\dim(\text{colspace}(A+B)) \leq \dim(\text{colspace}(A)) + \dim(\text{colspace}(B))$$

$$\text{Rank}(A+B) \leq \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B)$$

در اینجا $1 = \text{Rank}(B)$ می باشد پس داریم :

$$\text{Rank}(A) \leq \text{Rank}(A-B) + \overbrace{\text{Rank}(B)}^{1}$$

$$\Rightarrow \text{Rank}(A) - 1 \leq \text{Rank}(A-B)$$

۵) دقت کنید ضرب دو ماتریس شبیه ضرب یک ماتریس در چند بردار است که هرکدام یک ستون ماتریس حاصل را خروجی می دهند. برای واضح شدن مطلب می توانیم مثال ۲×۲ را ببینیم :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

که ماتریس حاصل را به دو شکل می توان نوشت :

۱) برحسب ستون های B : $\begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 \end{bmatrix}$ (b_i یعنی ستون iام B)

۲) برحسب سطرهای A : $\begin{bmatrix} a_1^T B \\ a_2^T B \end{bmatrix}$ (a_i^T یعنی سطر iام A)

حال از این می خواهیم برای حل سوال استفاده کنیم.

به نام خدا

$$\text{colspace}(AB) = \alpha_1 A b_1 + \alpha_2 A b_2 \subseteq \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = \text{colspace}(B)$$

Ab نمی‌تواند بعد ما را بیشتر کند چون تبدیل خطی یک نقطه را دقیقا به یک نقطه مپ می‌کند

نه مثلا به چند نقطه لذا $\alpha_1 A b_1 \subseteq \alpha_1 b_1$ پس طبق عبارت بالا:

$$\text{Rank}(AB) \leq \text{Rank}(B)$$

حال بر فضای سطری AB داریم:

$$\text{Rowspace}(AB) = \alpha_1 a_1^T B + \alpha_2 a_2^T B \subseteq \alpha_1 a_1^T + \alpha_2 a_2^T = \text{Rowspace}(A)$$

طبق استدلال مشابه $\alpha_1 a_1^T B \subseteq \alpha_1 a_1^T$ می‌باشد. بنابراین:

$$\text{Rowspace}(AB) \subseteq \text{Rowspace}(A) \Rightarrow \text{RowRank}(AB) \leq \text{RowRank}(A)$$

$$\Rightarrow \text{Rank}(AB) \leq \text{Rank}(A)$$

$$\Rightarrow \text{Rank}(AB) \leq \min(\text{Rank}(A), \text{Rank}(B))$$

ت) ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر داشته باشیم:

$$W_1 = Nullspace(A)$$
$$W_2 = Nullspace(A^T)$$

آنگاه:

$$Dim(W_1 + W_2) = n$$

بدین منظور دقت کنید که برای هر $x \in C(A)$ داریم:

$$x \in C(A) \implies \exists z : Az = x \implies A^2 z = Ax = 0 \implies x \in W_1$$

که یعنی فضای ستونی A یک زیر فضا از W_1 است. اما می‌دانیم که به علت مکمل متعامد بودن فضاهای $W_2, C(A)$ پس هر بردار درون R_n را می‌توان به صورت جمع دو بردار درون این دو زیرفضا نوشت. حال با توجه به نکته‌ای که در بالا ثابت کردیم، پس هر بردار درون R_n را می‌توان به صورت جمع دو بردار درون زیرفضاهای W_1, W_2 نوشت.

$$\implies Dim(W_1 + W_2) \geq n$$

که نتیجه می‌دهد $Dim(W_۱+W_۲)=n$.
حال به ادامه حل می‌پردازیم.

لم ۱. فضاهای ستونی و سطری ماتریس A بر هم عمود هستند.
برای اثبات این نکته دقت کنید که اگر دو بردار دلخواه در فضاهای سطری و ستونی این ماتریس مانند Ax, A^Ty در نظر بگیریم:

$$(A^Ty)^TAx = y^TAAx = y^TA^۲x = ۰$$

که لم را ثابت می‌کند.

از این لم می‌توانیم نتیجه بگیریم که فضاهای $Nullspace(A+A^T), Nullspace(A)\cap Nullspace(A^T)$ برابر هستند. برای اثبات این نکته هم اینگونه عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \in Nullspace(A+A^T) \implies Ax + A^Tx = ۰ \implies Ax = -A^Tx \overset{\text{لم ۱}}{\implies} Ax = A^Tx = ۰ \implies x \\ x \in Nullspace(A)\cap Nullspace(A^T) \implies Ax = A^Tx = ۰ \implies (A+A^T)x = ۰ \implies x \in Nullspace(A+A^T) \end{cases}$$

که حکم ما را نتیجه می‌دهد. حال دقت کنید که:

$$\begin{aligned} Dim(W_۱+W_۲)=n &\implies Dim(W_۱)+Dim(W_۲)-Dim(W_۱+W_۲) = ۲Dim(W_۱)-n \\ &\implies Dim(W_۱\cap W_۲) = ۲Dim(W_۱)-n \\ &\implies Dim(Nullspace(A+A^T)) = ۲Dim(Nullspace(A))-n \implies \boxed{Rank(A+A^T) = ۲Rank(A)} \end{aligned}$$