

## سوال اول

نامساوی های زیر را اثبات کنید:

$$6\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \leq \int_{-1}^1 e^{-x^2}$$
$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

## سوال دوم

(میانترم ترم بهار 1401-1402) مقادیری از  $x$  و  $y$  و  $z$  که عبارت زیر را کمینه می کنند بیابید:

$$\int_0^1 (\ln(t) - x - yt - zt^2)^2 dt$$

راهنمایی: از مقادیر زیر می توانید استفاده کنید:

$$\int_0^1 \ln(t) dt = -1, \int_0^1 t \ln(t) dt = -\frac{1}{4}, \int_0^1 t^2 \ln(t) dt = -\frac{1}{9}, \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

## سوال سوم

فضای برداری  $V$  با بعد  $n$  را در نظر بگیرید. ثابت کنید اشتراک  $\frac{n}{2k}$  زیرفضا از  $V$  که هر یک دارای بعد  $n - k$  هستند، دارای بعد غیر صفر است.

## سوال چهارم

(تمرین سوم پاییز 1402) الف) اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس دلخواه  $n \times n$  باشند، نشان دهید:

$$\text{rank}(A + B) + \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

ب) اگر  $A$  و  $B$  و  $C$  سه ماتریس ناصفر  $n \times n$  باشند به طوری که  $ABC = 0$  نشان دهید:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) + \text{rank}(C) \leq 2n$$

## سوال پنجم

حجم شکل محصور در معادله زیر را به دست آورید:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz \leq 1$$

## سوال ششم

اگر  $A_{n \times n}$  یک ماتریس وارون پذیر باشد و  $u$  و  $v$  دو بردار دلخواه از فضای  $R^n$  باشند، نشان دهید:

$$\det(A + uv^T) = (1 + v^T A^{-1}u)\det(A)$$