سوال اول

نامساوی های زیر را اثبات کنید:

$$6\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \le \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx \quad (a$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\, x_i\right)^2 \leftarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \le \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad (b$$

a) $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{1} e^{-x^2} dx \rightarrow I$

$$\langle f,g\rangle = \int_0^b fg\,dx \rightarrow \underbrace{\int_0^1 fg\,dx}$$

$$\langle f,g\rangle^2 \le \langle f,f\rangle\langle g,g\rangle \rightsquigarrow \begin{aligned} f(x) &= x \\ g(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\left(\int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 \le \int_0^1 x^2 dx \times \int_0^1 \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx$$

$$\left(\left[-e^{-x^2/2}\right]_0^1\right)^2 \le \cancel{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1}^{\,1/3} \times \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

$$\left(-e^{-\frac{1}{2}} + e^0\right)^2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{e}}+1\right)^2 \le \frac{1}{3}\cancel{\int_0^1 e^{-x^2} dx} \rightarrow \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$$

$$\Rightarrow 6\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \le \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$$

b) $$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\, x_i\right)^2 \le \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$(a^T b)^2 \le \|a\|_2^2 \, \|b\|_2^2 \longrightarrow a = \begin{bmatrix} \sqrt{1} \\ \sqrt{2} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$a^T b = \sqrt{1}\, x_1 + \sqrt{2}\, x_2 + \dots + \sqrt{n}\, x_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\, x_i$$

$$\|a\|^2 = a^T a = \sqrt{1} \times \sqrt{1} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} \times \sqrt{n} = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\|b\|^2 = b^T b = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\, x_i\right)^2 \le \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

سوال دوم

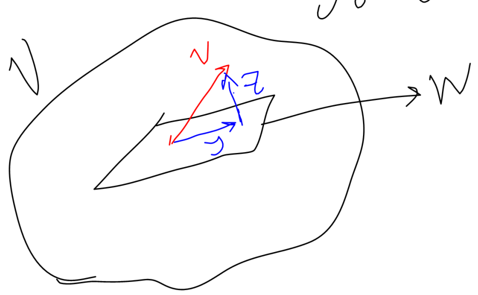
(میانترم ترم بهار 1401-1402) مقادیری از x و y و z که عبارت زیر را کمینه می‌کنند بیابید:

$$\int_0^1 (ln(t) - x - yt - zt^2)^2\, dt$$

راهنمایی: از مقادیر زیر می‌توانید استفاده کنید:

$$\int_0^1 ln(t)dt = -1,\ \int_0^1 tln(t)dt = -\frac{1}{4},\ \int_0^1 t^2 ln(t)dt = -\frac{1}{9},\ \int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1}$$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg\, dx \rightsquigarrow \|\ln t - (x + yt + zt^2)\|^2$$



$v = y + z$, $y \in W$, $z \in W^\perp$

$v - y = z$

$v = y + x$, $y \in W$

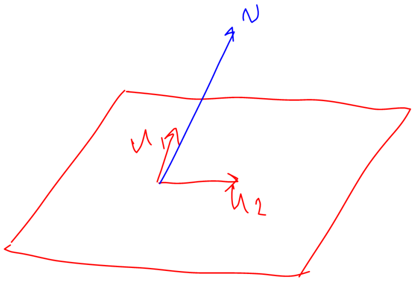
V: تمام توابع پیوسته در $[0,1]$

W: $\mathbb{P}_2$

$v = \ln t \qquad y = \text{proj}_{\mathbb{P}_2}(\ln t) =$

اگر $\{u_1, u_2, u_3\}$ یک پایه orthonormal برای $\mathbb{P}_2$ باشد آنگاه:

$$y = \text{proj}_{\mathbb{P}_2}(\overset{v}{\ln t}) = \langle u_1, v\rangle u_1 + \langle u_2, v\rangle u_2 + \langle u_3, v\rangle u_3$$



$\{\underset{a_1}{1}, \underset{a_2}{t}, \underset{a_3}{t^2}\} \rightarrow$ گرام اشمیت

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\left(\int_0^1 1^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}} = 1$$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - \langle a_2, q_1\rangle q_1 = t - \left(\int_0^1 t \times 1\,dt\right) \times 1 = t - \frac{1}{2}$$

$$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} \Rightarrow q_2 = \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$\|\tilde{q}_2\| = \left(\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$\tilde{q}_3 = a_3 - \langle a_3, q_1\rangle q_1 - \langle a_3, q_2\rangle q_2$$

$$= t^2 - \int_0^1 t^2 dt - \sqrt{12}\left(t-\frac{1}{2}\right)\int_0^1 t^2 \times \sqrt{12}\left(t-\frac{1}{2}\right) dt$$

$$= t^2 - \frac{\sqrt{12}}{2} t + \frac{\sqrt{12}}{24} - \frac{1}{3}$$

$$\|\tilde{q}_3\| = \sqrt{\frac{619}{720} - \frac{\sqrt{12}}{12}} = A \Rightarrow q_3 = \frac{1}{A}\tilde{q}_3$$

$$z = \frac{\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{12}}{12}}{A^2}$$

$$y = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{12}}{2} z$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{12}}{24} z$$

سوال سوم

فضای برداری V با بعد n را در نظر بگیرید. ثابت کنید اشتراک $\frac{n}{2k}$ زیرفضا از V که هر یک دارای بعد $n-k$ هستند، دارای بعد غیر صفر است.

لم: اشتراک r تا زیرفضای V که هریک بعد $n-k$ دارند دارای بعد حداقل $n-kr$ است.

$$\dim\left(U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{\frac{n}{2k}}\right) \geq n - k \times \frac{n}{2k} = \frac{n}{2}$$

اثبات لم: استقرا روی r:

پایه $(r=1)$:

$$\dim U_1 = n-k \geq n-k\times 1$$

گام استقرا: اگر حکم برای r درست باشد برای $r+1$ هم درست است.

فرض استقرا: $\dim\Big(\underbrace{\bigcap_{i=1}^{r} U_i}_{W}\Big) \geqslant n-kr$

حکم: $\dim(W \cap U_{r+1}) \geqslant n-k(r+1)$

$$\dim A + \dim B = \dim(A\cap B) + \dim(A+B)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim W}_{\geqslant n-kr} + \underbrace{\dim U_{r+1}}_{=n-k} - \underbrace{\dim(W+U_{r+1})}_{\leqslant n} = \dim(W \cap U_{r+1})$$

$$\Rightarrow \dim(W \cap U_{r+1}) \geqslant n-kr + n-k - n = n-kr-k = n-k(r+1)$$

حکم

$\Leftarrow$ لم درست است و سؤال حل شد

سوال چهارم

(تمرین سوم پاییز 1402 الف) اگر A و B دو ماتریس دلخواه $n\times n$ باشند، نشان دهید: (و می‌دانیم $AB=BA$)

$$rank(A+B) + rank(AB) \leq rank(A) + rank(B)$$

ب) اگر A و B و C سه ماتریس ناصفر $n\times n$ باشند به طوری که $ABC=0$ نشان دهید:

$$rank(A) + rank(B) + rank(C) \leq 2n$$

الف) راه حل اول:

$W_1 := N(A) \qquad W_2 := N(B)$

$X_{n\times n}$

$\operatorname{rank}(X) + \operatorname{nullity}(X) = n$

$$\operatorname{rank}(A+B) + \operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

$$\Updownarrow$$

$$\big(n - \operatorname{nullity}(A+B)\big) + \big(n - \operatorname{nullity}(AB)\big) \leqslant \big(n - \operatorname{nullity}(A)\big) + \big(n - \operatorname{nullity}(B)\big)$$

$$\operatorname{nullity}(A+B) + \operatorname{nullity}(AB) \geqslant \operatorname{nullity}(A) + \operatorname{nullity}(B)$$

$$= \dim W_1 + \dim W_2$$

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

$$\Rightarrow \operatorname{nullity}(A+B) + \operatorname{nullity}(AB) \geqslant \dim(W_1+W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

اول:

a) $\dim(W_1 + W_2) \leqslant \operatorname{nullity}(AB)$

b) $\dim(W_1 \cap W_2) \leqslant \operatorname{nullity}(A+B)$

a) $\forall x \in W_1 + W_2 : \exists u \in W_1, v \in W_2 : x = u + v$

$$\Rightarrow ABx = ABu + ABv \underset{AB=BA}{=} B\overset{0}{\overbrace{Au}} + A\overset{0}{\overbrace{Bv}} = 0$$

$\forall x \in W_1 + W_2 ; x \in N(AB) \Rightarrow W_1 + W_2 \subseteq N(AB)$

$$\Rightarrow \dim(W_1 + W_2) \leqslant \operatorname{nullity}(AB)$$

b) $\forall x \in W_1 \cap W_2$

$$\Rightarrow (A+B)x = \underbrace{\cancel{Ax}^{\,0}}_{x \in N(A)} + \underbrace{\cancel{Bx}^{\,0}}_{x \in N(B)} = 0$$

$$\Rightarrow W_1 \cap W_2 \subseteq N(A+B) \Rightarrow \underline{\dim(W_1 \cap W_2) \leq \text{nullity}(A+B)}$$

راه حل دوم :

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{n\times n} & B \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(X) = \text{rank}(A) + \text{rank}(CB)$
$= a+b$

$\text{rank}(A) = a$

$c_1, c_2, \dots, c_a$

rank

$\text{rank}(B) = b$

$d_1, d_2, \dots, d_b$

$$\sum \alpha_i c_i + \sum \beta_j d_j = 0$$

تنها راهی که ممکن است ضرایب 0 باشد $\forall j: \beta_j = 0$

$$Y = X \begin{bmatrix} I & -B \\ I & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B & \cancel{-AB+BA}^{\,0} \\ B & BA \end{bmatrix}$$

$m = \text{rank}(A+B)$

$p = \text{rank}(BA)$

$\hookrightarrow \text{rank}(Y) = m + p$

$\text{rank}(ST) \leq \text{rank}(S)$ قضیه

$$\text{rank}(Y) \leq \text{rank}(X) \Rightarrow$$

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

ب) اگر A و B و C سه ماتریس ناصفر $n \times n$ باشند به طوری که $ABC = 0$ نشان دهید:

$$rank(A) + rank(B) + rank(C) \leq 2n$$

$$ABC = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : ABCx = 0 \Rightarrow A(BCx) = 0$$

$$\Rightarrow range(BC) \subseteq N(A)$$

$$n = rank(A) + nullity(A) \geq rank(A) + rank(BC) \quad \mathrm{I}$$

$$u \in N(BC) \Rightarrow u \in N(C) \text{ or } Cu \in N(B)$$

$$nullity(BC) \qquad nullity(C) \qquad \leq nullity(B)$$

$$nullity(BC) \leq nullity(C) + nullity(B)$$

$$(n - rank(BC)) \leq (n - rank(C)) + (n - rank(B))$$

$$\Rightarrow rank(B) + rank(C) - n \leq rank(BC)$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow n \geq rank(A) + rank(B) + rank(C) - n$$

$$\Rightarrow rank(A) + rank(B) + rank(C) \leq 2n$$

سوال پنجم

حجم شکل محصور در معادله زیر را به دست آورید:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz \leq 1$$

* یادآوری :

$A : V \to V$

$$|\det(A)| = \frac{\text{حجم شکل تبدیل خطی یافته شده}}{\text{حجم شکل بدون تبدیل خطی}}$$

$$x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x^2+y^2+2xy)+\frac{1}{2}(x^2+z^2+2xz)+\frac{1}{2}(y^2+z^2+2yz) \leq 1$$

$$\Rightarrow (x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2 \leq 2 \longrightarrow \text{III}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{u=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}} Au = \begin{bmatrix} a+b \\ a+c \\ b+c \end{bmatrix} = v = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$$

Ω : مجموعه نقاطی که در معادله III صدق می کنند

S : مجموعه نقاطی که در معادله $x^2+y^2+z^2 \leq 2$ صدق می کنند

$$u = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \Omega : (a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow a'^2+b'^2+c'^2 \leq 2$$

$$\left(Au = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}\right) \Rightarrow Au \in S$$

$$v = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \in S : a'^2+b'^2+c'^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow (a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2 \leq 2$$

$a' = a+b$
$b' = a+c$
$c' = b+c$

$$w := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{Aw=v} w \in \Omega$$

* نتیجه می‌گیریم A یک تبدیل خطی است که مجموعه Ω را به S تبدیل می‌کند.

$$|\det A| = \frac{\text{حجم } S}{\text{حجم } \Omega} = \frac{\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3}{V} = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right|$$

$$1 \times \cancel{\left|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right|}_{-1} - 1 \times \cancel{\left|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right|}$$
$$= -2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(2\sqrt{2}) \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3}\pi\sqrt{2}$$

سوال ششم

اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس وارون پذیر باشد و u و v دو بردار دلخواه از فضای R^n باشند، نشان دهید:

$$det(A + uv^T) = (1 + v^T A^{-1} u)det(A)$$

$$A = I_{n\times n}$$

$$B = \begin{bmatrix} I & O_{n\times 1} \\ v^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} I + uv^T & u \\ O_{1\times n} & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & u \\ O_{1\times n} & 1 + v^T u \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & O_{n\times 1} \\ -v^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$BCD = E$$

$$\Rightarrow \det(B)\det(C)\det(D) = \det(E)$$

$$\det(B) = 1 \qquad \det(D) = 1$$

$$\Rightarrow \det(C) = \det(E)$$

$$\det(C) = \det(I + uv^T)$$

$$\det(E) = 1 + v^T u$$

$$\det(I + uv^T) = (1 + v^T u)\det(I)$$

$$= (1 + v^T I^{-1} u)\det(I)$$

$$A + uv^T = A(I + A^{-1}uv^T)$$

$$\det(A + uv^T) = \det(A)\,\cancel{\det(I + \underbrace{A^{-1}u}_{u'}v^T)}$$

$$(1 + v^T u')$$

$$\Rightarrow \det(A + uv^T) = \det(A)(1 + v^T A^{-1}u)$$